UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΔΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARE.

45

TOME QUATRIÈME. — ANNÉE 1898.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

Tous droits réservés.

QA
1
J68
4
Ser.5

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s5journaldemat04liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

L'intégrale des forces vives en Thermodynamique;

PAR M. P. DUHEM.

I. — Des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives.

Dans ce Travail, qui fait suite à notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (1) et à notre Mémoire intitulé : *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (2), nous nous proposons d'étudier un système dont les diverses parties sont à des températures différentes. Pour simplifier les écritures nous supposerons qu'il existe seulement deux telles parties que nous désignerons par les indices 1 et 2, mais les démon-

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VIII, p. 269; 1892; — t. IX, p. 293; 1893; — t. X, p. 203; 1894.

(2) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II; 1896. Paris (A. Hermann), 1896.

strations que nous ferons seront tout à fait indépendantes du nombre de ces parties.

La partie 1 aura une température absolue T_1; elle sera, en outre, définie par les variables *normales* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$; nous admettrons, comme nous l'avons toujours fait en des questions de ce genre, que si T_1 varie seul, $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ gardant des valeurs invariables, les divers éléments matériels qui composent la partie 1 demeurent immobiles.

La partie 2 sera définie, également, par la température T_2 et les variables normales $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

Entre ces deux parties, nous supposerons l'existence de k liaisons bilatérales

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1^1\delta\alpha_1 + \ldots + P_1^1\delta\lambda_1 + M_2^1\delta\alpha_2 + \ldots + P_2^1\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_1^k\delta\alpha_1 + \ldots + P_1^k\delta\lambda_1 + M_2^k\delta\alpha_2 + \ldots + P_2^k\delta\lambda_2 = 0, \end{array}\right.$$

les coefficients $M_1^j, \ldots, P_1^j, M_2^j, \ldots, P_2^j$ étant des fonctions des variables $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2$, mais point de T_1, T_2.

Le potentiel thermodynamique interne du système est de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F} = \mathcal{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1) + \mathcal{F}_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, T_2) \\ \qquad + \mathrm{EM}(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2), \end{array}\right.$$

$\mathcal{F}_1$ étant le potentiel thermodynamique interne de la partie 1, considérée isolément;

$\mathcal{F}_2$ étant le potentiel thermodynamique interne de la partie 2, considérée isolément;

EM étant le potentiel des actions mutuelles des corps 1 et 2.

Entre les vitesses $\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \lambda'_1, \alpha'_2, \beta'_2, \ldots, \lambda'_2$, les conditions (1) donnent les k relations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1^1\alpha'_1 + \ldots + P_1^1\lambda'_1 + M_2^1\alpha'_2 + \ldots + P_2^1\lambda'_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_1^k\alpha'_1 + \ldots + P_1^k\lambda'_1 + M_2^k\alpha'_2 + \ldots + P_2^k\lambda'_2 = 0. \end{array}\right.$$

Supposons le système dénué de toute viscosité et de tout frottement; nous aurons alors, pour équations du mouvement du système [1],

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1}(\mathcal{F}_1 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} + \Pi^1 M_1^1 + \ldots + \Pi^k M_1^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1}(\mathcal{F}_1 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} + \Pi^1 P_1^1 + \ldots + \Pi^k P_1^k = 0. \end{cases}$$

$$(4\,bis)\quad \begin{cases} A_2 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2}(\mathcal{F}_2 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_2} + \Pi^1 M_2^1 + \ldots + \Pi^k M_2^k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_2 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_2}(\mathcal{F}_2 + E\Psi - \mathfrak{T}) - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} + \Pi^1 P_2^1 + \ldots + \Pi^k P_2^k = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations :

$\mathfrak{T}$ est la force vive du système;

$A_1, \ldots, L_1$ sont les actions que les corps étrangers exercent sur le corps 1;

$A_2, \ldots, L_2$ sont les actions que les corps étrangers exercent sur le corps 2;

enfin $\Pi^1, \Pi^2, \ldots, \Pi^k$ sont des quantités qui dépendent de

$$\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1, \quad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, T_2,$$
$$\alpha'_1, \ldots, \lambda'_1, \quad \alpha'_2, \ldots, \lambda'_2,$$

mais point [2] des quantités

$$\alpha''_1, \ldots, \lambda''_1, \quad \alpha''_2, \ldots, \lambda''_2.$$

Le nombre des équations du mouvement (3), (4), (4 *bis*) est

---

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIe Partie, Chapitre III, n° 7 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 255; 1894).

[2] Pour la démonstration de ce point, voir *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Ire Partie, Chapitre I, § 4.

$(n_1 + n_2 + k)$, en désignant par n_1 le nombre des variables normales $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et par n_2 le nombre des variables normales $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

D'autre part, nous avons à déterminer, en fonctions du temps t,

les $(n_1 + 1)$ variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1$;
les $(n_2 + 1)$ variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, T_2$;
les k variables auxiliaires $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$.

Soit, en tout, $(n_1 + n_2 + k + 2)$ variables.

D'où la proposition suivante :

Le nombre des équations que la Thermodynamique fournit pour déterminer le mouvement d'un système est inférieur au nombre de variables à déterminer d'autant d'unités qu'il y a, dans le système, de parties susceptibles d'être portées à des températures différentes.

Pour compléter la mise en équations du problème dynamique, il faudra emprunter à des hypothèses étrangères à la Thermodynamique un nombre de relations supplémentaires égal au nombre de ces parties.

Soient

$$(5) \qquad \theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0$$

ces relations supplémentaires.

Multiplions respectivement les deux membres des équations (4) par $\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \lambda'_1$ et les deux membres des équations (4 *bis*) par $\alpha'_2, \beta'_2, \ldots, \lambda'_2$. Ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (3). Nous trouvons

$$\begin{aligned} &A_1\alpha'_1 + \ldots + L_1\lambda'_1 + A_2\alpha'_2 + \ldots + L_2\lambda'_2 \\ &- \left(\frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\alpha_1}\alpha'_1 + \ldots + \frac{\partial\bar{\tau}_1}{\partial\lambda_1}\lambda'_1 + \frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\alpha_2}\alpha'_2 + \ldots + \frac{\partial\bar{\tau}_2}{\partial\lambda_2}\lambda'_2\right) - E\frac{dW}{dt} - \frac{d\mathfrak{T}}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Supposons que les actions exercées sur le système par les corps

étrangers à ce système dépendent d'un potentiel

$$\Omega(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \quad \alpha_2, \ldots, \lambda_2).$$

L'égalité précédente deviendra

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}(\Omega + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathrm{E}\Psi + \mathfrak{T}) - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1}\frac{d\mathrm{T}_1}{dt} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2}\frac{d\mathrm{T}_2}{dt} = 0.$$

Pour que cette relation (6) *fournisse immédiatement une intégrale première* (INTÉGRALE DES FORCES VIVES) *des équations du second ordre* (4) *et* (4 *bis*), *il faut et il suffit que l'expression*

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1} d\mathrm{T}_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2} d\mathrm{T}_2$$

représente, soit d'elle-même, soit en vertu des équations supplémentaires (5), *la différentielle totale d'une fonction de* $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$.

II. — Des systèmes classiques.

La fonction $\mathcal{F}_1$ ne dépend que des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathrm{T}_1$; la fonction $\mathcal{F}_2$ ne dépend que des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathrm{T}_2$; pour que l'expression

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1} d\mathrm{T}_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2} d\mathrm{T}_2$$

soit, par elle-même, une différentielle totale, il faut et il suffit que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathrm{T}_1}$ soit une fonction de la seule variable T_1 et que $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathrm{T}_2}$ soit une fonction de la seule variable T_2. Donc :

Pour qu'un système, soumis à des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel, admette une intégrale des forces vives, quelle que soit la forme des relations supplémentaires, il faut et il suffit

que l'on ait

$$(7)\quad \begin{cases} \pi_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1) = \mathcal{G}_1(T_1) + E\psi_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1), \\ \pi_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, T_2) = \mathcal{G}_2(T_2) + E\psi_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2). \end{cases}$$

Nous donnerons le nom de *systèmes classiques* aux systèmes pour lesquels les égalités (7) sont vérifiées, et qui sont dénués de toute viscosité et de tout frottement.

Donnons un exemple de semblables systèmes; cet exemple justifiera la dénomination de *systèmes classiques* que nous leur avons attribuée.

Imaginons un nombre quelconque de corps $c_1, c'_1, c''_1, \ldots$, tous à la même température, variable d'un instant à l'autre, T_1. Supposons que chacun de ces corps soit un solide invariable, d'état invariable, sauf la température; le potentiel thermodynamique interne de chacun d'eux est une fonction de la température seule; désignons par $g_1(T_1)$, $g'_1(T_1)$, $g''_1(T_1)$, ... les potentiels thermodynamiques internes des corps c_1, c'_1, c''_1.

Pour former le système partiel 1, prenons les corps $c_1, c'_1, c''_1, \ldots$ et laissons-les indépendants les uns des autres, ou bien unissons-les par des liaisons bilatérales sans viscosité ni frottement. Le système partiel 1 sera alors un système sans viscosité ni frottement. Si nous désignons par $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ les variables indépendantes qui fixent la position relative des corps $c_1, c'_1, c''_1, \ldots$, le potentiel thermodynamique interne du système partiel 1 sera

$$\begin{aligned} &\pi_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, T_1) \\ &\quad = g_1(T_1) + g'_1(T_1) + g''_1(T_1) + \ldots + E\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1), \end{aligned}$$

$E\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1)$ étant le potentiel des actions mutuelles des corps c_1, c'_1, c''_1, ...

Ce potentiel thermodynamique interne a la forme présentée en la première égalité (7).

Formons d'une manière analogue les systèmes partiels 2, ... et laissons-les indépendants les uns des autres, ou bien associons-les par des liaisons bilatérales sans viscosité ni frottement; nous obtiendrons un système classique.

Et l'on voit, en effet, qu'un tel système, où l'on peut attribuer aux corps c_1, c'_1, c''_1, ... des dimensions très petites telles que celles que certaines Écoles attribuent aux *molécules*, constitue bien le type général des systèmes que l'on considérait en Mécanique avant l'époque récente où la Thermodynamique est venue élargir le champ de cette Science.

Examinons les propriétés que la Thermodynamique attribue à ces systèmes classiques; cet examen sera d'importance, car il nous renseignera sur les liens qui unissent l'ancienne Mécanique à la nouvelle Thermodynamique.

Nous avons vu, tout d'abord, que, *pour qu'un système classique admette une intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il soit soumis à des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel* Ω.

Désignons, en effet, par $G_1(T_1)$, $G_2(T_2)$, ... des fonctions définies par les égalités

$$(8)\qquad \frac{dG_1(T_1)}{dT_1} = \mathcal{G}_1(T_1), \qquad \frac{dG_2(T_2)}{dT_2} = \mathcal{G}_2(T_2), \qquad \ldots.$$

L'égalité (6) deviendra, en vertu des égalités (7) et (8),

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}(\Omega + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2 + E\Psi + \mathfrak{T}) = 0,$$

ou bien encore

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}[\Omega + E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi) + \mathfrak{T}] = 0.$$

Appliquons cette dernière forme à l'exemple du système classique que nous avons défini tout à l'heure.

$E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi)$ sera, dans ce cas, le potentiel de toutes les actions que les corps c_1, c'_1, c''_1, ..., c_2, c'_2, ... exercent les uns sur les autres. L'égalité (10) conduit donc, pour un tel système, à la proposition suivante :

La somme de la force vive, du potentiel des actions extérieures et du potentiel des actions intérieures demeure invariable pendant tout mouvement du système.

On retrouve bien l'énoncé du théorème de la force vive, tel que le fournit la Mécanique classique.

L'énergie interne U d'un système est donnée, en général, par la formule

$$EU = \mathcal{F} - T_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} - T_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2}.$$

En vertu des égalités (2) et (7), cette égalité devient, pour un système classique,

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} EU &= E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi) + \mathcal{G}_1(T_1) - T_1 \frac{d\mathcal{G}_1(T_1)}{dT_1} \\ &\qquad + \mathcal{G}_2(T_2) - T_2 \frac{d\mathcal{G}_2(T_2)}{dT_2}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(12)\quad EA(T_1, T_2) = \mathcal{G}_1(T_1) - T_1 \frac{d\mathcal{G}_1(T_1)}{dT_1} + \mathcal{G}_2(T_2) - T_2 \frac{d\mathcal{G}_2(T_2)}{dT_2}$$

et l'égalité précédente deviendra

$$(13)\qquad U = \psi_1 + \psi_2 + \Psi + A(T_1, T_2).$$

En vertu des égalités (7) et (11), les équations (4) et (4 *bis*) prennent la forme suivante, qui constitue ainsi une forme acceptable des équations du mouvement d'un système classique :

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &X_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x'_1} + H^1 M^1_1 + \ldots + H^k M^k_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &L_1 - \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} + H^1 P^1_1 + \ldots + H^k P^k_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(14\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &X_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x'_2} + H^1 M^1_2 + \ldots + H^k M^k_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &L_2 - \frac{\partial}{\partial \lambda_2}(EU - \mathfrak{T}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} + H^1 P^1_2 + \ldots + H^k P^k_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Dans les équations du mouvement d'un système classique, on peut, au potentiel thermodynamique interne du système, substituer

le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Nous avions déjà indiqué [1] que les équations du mouvement des systèmes que l'on étudie en Mécanique pouvaient être mises sous les formes (14) et (14 *bis*).

Les coefficients calorifiques d'un système à liaisons bilatérales sont donnés par les égalités [2]

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} - A_1 - \Pi^1 M_1^1 - \ldots - \Pi^k M_1^k = ER_{\alpha_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} - L_1 - \Pi^1 P_1^1 - \ldots - \Pi^k P_1^k = ER_{\lambda_1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E\dfrac{\partial U}{\partial T_1} = Ec_1, \end{array}\right.$$

$$(15\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_2} - A_2 - \Pi^1 M_2^1 - \ldots - \Pi^k M_2^k = ER_{\alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} - L_2 - \Pi^1 P_2^1 - \ldots - \Pi^k P_2^k = ER_{\lambda_2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E\dfrac{\partial U}{\partial T_2} = Ec_2. \end{array}\right.$$

En vertu des égalités (11), (14), (14 *bis*), ces égalités deviennent

$$(16)\qquad R_{\alpha_1} = 0, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_1} = 0, \qquad R_{\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_2} = 0.$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} Ec_1 = -T_1 \dfrac{d^2 G_1(T_1)}{dT_1^2}, \\ Ec_2 = -T_2 \dfrac{d^2 G_2(T_2)}{dT_2^2}. \end{array}\right.$$

---

(1) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, Ire Partie, Chapitre III, n° 4 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VIII, p. 324; 1892).

(2) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIIe Partie, Chapitre III, n° 8 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X, p. 256; 1894).

Pour un système classique, tous les coefficients calorifiques sont nuls, sauf la capacité calorifique de chacune des parties de température uniforme; cette capacité calorifique est une fonction de la température seule.

Nous avons déjà signalé [1], dans la définition de l'entropie, le rôle exceptionnel joué par les systèmes que caractérisent les égalités (16) et (17).

La quantité de chaleur δQ que le système dégage dans une modification réelle ou virtuelle quelconque aura pour valeur

$$\delta Q = -(c_1 \delta T_1 + c_2 \delta T_2), \tag{18}$$

ou bien encore, en vertu des égalités (12) et (17),

$$\delta Q = -\delta A(T_1, T_2). \tag{19}$$

La quantité de chaleur dégagée par le système durant une modification réelle ou virtuelle quelconque est la différentielle totale d'une fonction uniforme de l'état du système.

La fonction $A(T_1, T_2)$ joue exactement ici le rôle de ce que les anciens physiciens nommaient *quantité de calorique libre* contenue dans le système; de plus, pour ces physiciens, la *quantité de calorique latent* contenue dans notre système eût été invariable.

En vertu des égalités (7), qui caractérisent un système classique, les équations du mouvement (4) et (4 *bis*) deviennent

$$(20)\quad \begin{cases} A_1 - \dfrac{\partial}{\partial z_1} E(\psi_1 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z'_1} + H^1 M^1_1 + \ldots + H^k M^k_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1} E(\psi_1 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_1} + H^1 P^1_1 + \ldots + H^k P^k_1 = 0, \end{cases}$$

[1] *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, IIe Partie, Chapitre III, n° 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 357; 1893).

$$(20\,bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A_2 - \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} E(\psi_2 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_2} + H^1 M^1_2 + \ldots + H^k M^k_2 = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_2 - \dfrac{\partial}{\partial \lambda_2} E(\psi_2 + \Psi) + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_2} + H^1 P^1_2 + \ldots + H^k P^k_2 = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations nous montrent, en premier lieu, que pour traiter le mouvement du système que nous avons choisi comme exemple de système classique on peut, dans les équations du mouvement fournies par la Thermodynamique, substituer au potentiel thermodynamique interne de chacun des systèmes partiels 1 et 2 le potentiel des actions intérieures à chacun de ces systèmes; on retrouve ainsi les équations bien connues de la Dynamique. Mais les équations (20) et (20 *bis*) conduisent à une conséquence plus générale, car elle s'applique à tous les systèmes classiques :

Les $(n_1 + n_2)$ équations (20) et (20 *bis*), jointes aux k équations (3), peuvent être regardées comme $(n_1 + n_2 + k)$ équations linéaires entre les $(n_1 + n_2 + k)$ inconnues

$$\begin{array}{c} \alpha''_1, \ldots, \lambda''_2, \quad \alpha''_2, \ldots, \lambda''_2, \\ H^1, \quad H^2, \quad \ldots, \quad H^k. \end{array}$$

Ces $(n_1 + n_2 + k)$ inconnues sont déterminées en fonctions des coefficients des $(n_1 + n_2 + k)$ équations linéaires; or les températures T_1, T_2 des diverses parties du système ne figurent dans aucun de ces coefficients; nous pouvons donc, en particulier, énoncer la proposition suivante :

. Les quantités H^1, H^2, ..., H^k sont indépendantes des températures T_1, T_2 des diverses parties du système.

Cette proposition entraîne, à son tour, la suivante :

Lorsque le système étudié est un système classique, entre les $(n_1 + n_2)$ fonctions inconnues $\alpha_1(t)$, ..., $\lambda_1(t)$, $\alpha_2(t)$, ..., $\lambda_2(t)$ et les k fonctions inconnues auxiliaires H^1, H^2, ..., H^k, *on peut écrire les $(n_1 + n_2 + k)$ équations différentielles* (3), (20) *et* (20 *bis*), *où ne figurent pas les températures des diverses parties du système. Ces équations suffisent, hors de toute relation supplémentaire,*

pour déterminer les lois suivant lesquelles le système se déplace et se modifie, à l'exception de la loi suivant laquelle varie la température de chaque partie du système.

Une fois le mouvement du système connu, les relations supplémentaires déterminent la loi suivant laquelle varie la température de chaque partie du système.

On comprend ainsi comment Lagrange a pu développer les lois de la Mécanique des systèmes formés de solides sans s'occuper des variations de la température de ces corps et Fourier traiter des variations de la température de ces mêmes corps solides sans s'occuper de leur mouvement; comment on peut étudier le mouvement de la Terre, assimilée à un solide rigide, sans se préoccuper de la température de cet astre et étudier le refroidissement du globe terrestre sans se préoccuper de son mouvement.

Une telle indépendance entre les problèmes qui ressortissent à la Mécanique et les problèmes qui ressortissent à la Théorie de la chaleur n'existe plus lorsque les systèmes auxquels on a affaire ne sont plus des *systèmes classiques;* si, par exemple, au lieu de regarder la Terre comme un solide rigide, d'état invariable, on tient compte des changements de volume, de forme, d'état physique et chimique qui accompagnent son refroidissement, on ne peut plus séparer le problème du mouvement de la Terre et le problème du refroidissement terrestre.

III. — Des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives en vertu des relations supplémentaires.

Lorsqu'on n'a pas affaire à un système classique, l'expression

$$\frac{\partial \bar{\pi}_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, T_1)}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial \bar{\pi}_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, T_2)}{\partial T_2} dT_2$$

n'est plus une différentielle totale. Mais il peut arriver que les équations supplémentaires (5) entraînent une égalité de la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial \bar{\pi}_1}{\partial T_1} \frac{dT_1(t)}{dt} + \frac{\partial \bar{\pi}_2}{\partial T_2} \frac{dT_2(t)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le système admettra une intégrale des forces vives, qui, en vertu des égalités (6) et (21), sera de la forme

$$(22)\qquad \Omega + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi + \mathfrak{T} - F(t) = \text{const.}$$

On peut imaginer une infinité de formes des relations supplémentaires (5), telles qu'une égalité de la forme (21) soit vérifiée; citons-en quelques exemples remarquables.

Imaginons que les relations supplémentaires (5) entraînent cette conséquence :

Toute modification du système étudié est adiabatique.

Le système étant dénué de viscosité, la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle ou virtuelle a pour valeur

$$\delta Q = -(R_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + R_{\lambda_1}\delta\lambda_1 + c_1\delta T_1 + R_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + R_{\lambda_2}\delta\lambda_2 + c_2\delta T_2),$$

avec

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} R_{\alpha_1} &= -\frac{T_1}{E}\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1\,\partial T_1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ R_{\lambda_1} &= -\frac{T_1}{E}\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1\,\partial T_1},\\ c_1 &= -\frac{T_1}{E}\frac{\partial^2\mathcal{F}_1}{\partial T_1^2},\end{aligned}\right.$$

$$(23\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} R_{\alpha_2} &= -\frac{T_2}{E}\frac{\partial^2\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2\,\partial T_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ R_{\lambda_2} &= -\frac{T_2}{E}\frac{\partial^2\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2\,\partial T_2},\\ c_2 &= -\frac{T_2}{E}\frac{\partial^2\mathcal{F}_2}{\partial T_2^2}.\end{aligned}\right.$$

Dire que, par suite des équations (5), toute modification réelle du système est adiabatique, c'est dire que les équations (5) entraînent

l'égalité

$$\frac{T_1}{E}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1 \partial T_1}\alpha'_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1 \partial T_1}\lambda'_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T_1^2}T'_1\right)$$
$$+\frac{T_2}{E}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2 \partial T_2}\alpha'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2 \partial T_2}\lambda'_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T_2^2}T'_2\right) = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1}\frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2}\frac{dT_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(T_1\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} + T_2\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2}\right).$$

Cette égalité prend la forme (21) si l'on pose

$$F = T_1\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} + T_2\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2}.$$

Il existe donc une intégrale des forces vives qui est, en vertu de l'égalité (22),

$$\Omega + \mathcal{F}_1 - T_1\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} + \mathcal{F}_2 - T_2\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} + E\Psi + \mathfrak{T} = \text{const.}$$

ou bien

$$\Omega + EU + \mathfrak{T} = \text{const.},$$

relation qui, pour une modification adiabatique accomplie sous des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel, découle immédiatement du principe de la conservation de l'énergie.

Une des formes d'équations complémentaires qui entraînent les conséquences que nous venons de détailler s'obtient en exprimant que, *durant une modification réelle du système, chacune des parties qui le composent ne reçoit ni ne cède de chaleur;* c'est-à-dire en écrivant que l'on a

$$R_{\alpha_1}\alpha'_1 + \ldots + R_{\lambda_1}\lambda'_1 + c_1 T'_1 = 0,$$
$$R_{\alpha_2}\alpha'_2 + \ldots + R_{\lambda_2}\lambda'_2 + c_2 T'_2 = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (23) et (23 *bis*),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} = 0.$$

Ce sont précisément les relations supplémentaires introduites par Laplace dans la théorie de la propagation du son au sein d'une masse d'air.

On obtient encore une relation de la forme (21) si l'on prend pour relations supplémentaires les relations

$$\frac{dT_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_2}{dt} = 0,$$

ou, en d'autres termes, si *l'on suppose que chaque partie du système garde une température invariable pendant que le système se modifie;* on a alors

$$F(t) = 0$$

et l'intégrale des forces vives (22) prend la forme

$$\Omega + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + E\Psi + \mathfrak{T} = \text{const.},$$

qui est ainsi la forme de l'intégrale des forces vives pour les *modifications isothermiques.*

On sait que cette forme de relations supplémentaires [1] avait été introduite par Newton et les géomètres du XVIIIe siècle dans la théorie du son.

Ces considérations montrent que les questions qui ressortissent à la Thermodynamique ont dû solliciter l'attention des physiciens dès qu'on a voulu aborder l'étude de systèmes autres que des systèmes classiques; et, en fait, c'est la théorie de la propagation du son dans l'air qui a provoqué Laplace à créer la Thermodynamique.

---

[1] Au sujet de ces deux formes de relations supplémentaires, voir L. Natanson, *Zeitschrift für physikalische Chemie*, Bd. XXIV, p. 302; 1897.

Sur les groupes d'ordre $p^m q^2$;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

M. Sylow a démontré qu'un groupe d'ordre p^m (p premier, $m > 1$) est nécessairement composé.

M. Frobenius a étendu cette proposition aux groupes d'ordre $p^m q$ (q premier et différent de p).

Nous allons montrer qu'elle subsiste encore pour les groupes d'ordre $p^m q^2$.

1. Rappelons d'abord quelques propositions fondamentales, dues à M. Sylow et qui nous serviront de point de départ :

1° Un groupe G, dont l'ordre est divisible par p^m (sans l'être par p^{m+1}), contient des sous-groupes H, H′, ... d'ordre p^m.

2° Ces groupes sont les transformés d'un seul d'entre eux par les diverses substitutions de G.

3° Tout sous-groupe d'ordre p^α ($\alpha \leqq m$) contenu dans G est contenu dans l'un au moins des groupes H, H′, ...; il peut être commun à plusieurs d'entre eux.

4° Si p^α est l'ordre maximum des sous-groupes communs aux groupes H, H′, ..., considérés deux à deux, le nombre b des groupes H, H′, ... sera congru à 1 suivant le module $p^{m-\alpha}$.

5° Si $p^m a$ est l'ordre du groupe formé par celles des substitutions de G qui sont permutables à H, l'ordre de G sera égal à $p^m ab$.

M. Sylow établit ensuite qu'un groupe H d'ordre p^m est composé en

montrant qu'il contient nécessairement des substitutions échangeables à toutes celles de H.

On pourrait arriver au même résultat en se fondant sur le lemme suivant, qui nous sera utile :

2. Lemme. — *Si un groupe* H *d'ordre* p^m *contient un sous-groupe* I *d'ordre* p^α, *les substitutions de* H *permutables à* I *formeront un groupe d'ordre* p^β, *où* $\beta > \alpha$.

En effet, si β était égal à α, les transformés I, I', ... de I par les substitutions de H seraient en nombre $p^{m-\alpha}$ et chacun d'eux jouirait comme H de la propriété de n'être permutable qu'à ses propres substitutions.

Énumérons, d'autre part, les groupes I, I', ... en associant dans une même classe ceux que les substitutions de I transforment les uns dans les autres. Le groupe I, constamment transformé en lui-même, restera isolé. Tout autre groupe I' donnera $p^{\alpha-\alpha'}$ transformés, si $p^{\alpha'}$ est l'ordre du sous-groupe formé par les substitutions communes à I et à I' (car ce sont les seules, par hypothèse, qui soient permutables à I'); α' étant $< \alpha$, le nombre des groupes contenus dans la classe de I' serait un multiple de p ; de même pour chacune des autres classes. On aurait donc la relation impossible

$$p^{m-\alpha} \equiv 1 \pmod{p}.$$

3. Théorème. — *Un groupe* G, *d'ordre* $p^m q^2$, *est composé.*

Il contient, en effet, des sous-groupes d'ordre p^m, en nombre 1, q ou q^2.

S'il n'en contient qu'un seul, H, il sera invariant et G sera composé.

4. S'il en contient q, $H_1, \ldots, H_q$, les substitutions de G les permuteront les uns dans les autres. Ces déplacements formeront un groupe de degré q et isomorphe à G.

Mais tout groupe G (d'ordre $p^m q^2$) qui admet un isomorphe Γ dont le degré d soit $< 2q$ est composé. Car l'ordre de Γ divisant $d!$ ne pourra être divisible par q^2. L'isomorphisme sera donc mériédrique,

et G contiendra un sous-groupe invariant, formé par celles de ses substitutions qui correspondent à la substitution 1 du groupe Γ.

5. Admettons enfin que G contienne q^2 sous-groupes H, H', ..., d'ordre p^m.

Si ces groupes, considérés deux à deux, n'ont d'autre substitution commune que l'unité, ils contiendront en tout $q^2(p^m - 1)$ substitutions dont l'ordre est une puissance de p; elles seront distinctes par hypothèse; donc G contiendra exactement q^2 substitutions dont l'ordre soit premier à p. Mais il contient au moins un sous-groupe g d'ordre q^2. Celui-ci sera évidemment formé des q^2 substitutions en question. Il sera donc unique de son espèce. Il sera donc invariant et G sera composé.

6. Admettons au contraire que parmi les groupes H, H', ... il en est qui aient des substitutions communes autres que l'unité. Soit I un sous-groupe d'ordre maximum p^α parmi ceux qui sont contenus à la fois dans plusieurs groupes de la suite H, H', ...; et soient H_1, H_2, ..., H_l ceux des groupes de cette suite qui contiennent I.

Soient respectivement

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_l, \quad \Gamma$$

les groupes formés par celles des substitutions des groupes

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_l, \quad G,$$

qui sont permutables aux substitutions de I; soient enfin

$$p^{\beta_1}, \quad p^{\beta_2}, \quad \ldots, \quad p^\beta q^\lambda$$

les ordres de ces groupes.

Les groupes K_1, K_2, ..., K_l seront tous différents, car leur ordre est $> p^\alpha$ (2). Si deux d'entre eux, K_1 et K_2 étaient identiques, H_1 et H_2 auraient plus de p^α substitutions communes, contre l'hypothèse.

Ils se confondent respectivement avec les sous-groupes

$$\mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_2, \quad \ldots$$

d'ordre p^β que contient le groupe Γ.

En effet, K_1, par exemple, étant contenu dans Γ, sera nécessairement contenu dans l'un au moins des sous-groupes $\mathcal{H}$, tel que $\mathcal{H}_1$. Celui-ci devra lui-même être contenu dans l'un des groupes H. Ce dernier, ayant plus de p^α substitutions communes avec H_1, se confondra avec lui; mais K_1 contient toutes les substitutions communes à Γ et à H_1; il contiendra donc $\mathcal{H}_1$; étant lui-même contenu dans $\mathcal{H}_1$, il lui sera identique.

On aura par suite $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots > \alpha$.

7. Réciproquement, soit $\mathcal{H}_i$ l'un quelconque des sous-groupes $\mathcal{H}$. Il sera contenu dans l'un des groupes H et dans un seul, car son ordre est $> p^\alpha$. Ce dernier groupe appartiendra à la suite

$$H_1, \quad \ldots, \quad H_l$$

de ceux qui contiennent I. En effet, $\mathcal{H}_1$ contient K_1 qui contient lui-même I. Ce sous-groupe invariant sera contenu dans les transformés de $\mathcal{H}_1$ par les substitutions de Γ; or, $\mathcal{H}_i$ est l'un de ces transformés.

Soit donc H_i celui des groupes H qui contient $\mathcal{H}_i$. Le groupe K_i formé par les substitutions communes à H_i et à Γ contiendra $\mathcal{H}_i$. Ayant le même ordre que ce dernier groupe, il se confondra avec lui.

8. Remarquons enfin que $\mathcal{H}_i$ étant contenu dans un seul groupe H, à savoir H_i, toute substitution de G permutable à $\mathcal{H}_i$ le sera à H_i. Or les groupes H étant en nombre q^2, chacun d'eux n'est permutable qu'à ses propres substitutions. Donc celles des substitutions de Γ qui sont permutables à $\mathcal{H}_i$ seront communes à Γ et à H_i, et, par suite, appartiendront à $\mathcal{H}_i$. Le nombre des groupes $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_l$ sera donc q^λ. Donc

$$l = q^\lambda.$$

Le nombre des groupes H qui ont en commun le sous-groupe I sera donc égal à q^λ. Mais il est > 1 par hypothèse; donc $\lambda = 1$ ou 2.

Si $\lambda = 2$, I étant commun à tous les groupes H sera un sous-groupe invariant de G qui ne sera pas primitif.

9. Jusqu'ici nous n'avons guère fait que suivre la marche adoptée par M. Frobenius pour l'étude des groupes d'ordre $p^m q$. Mais une considération nouvelle est nécessaire pour traiter le cas où $\lambda = 1$, qu'il nous reste à examiner.

On a dans ce cas q^2 groupes H d'ordre p^2; q d'entre eux contiennent le sous-groupe I; celui-ci, transformé par les substitutions de G, donnera $\frac{p^m q^2}{p^\beta q} = p^{m-\beta} q$ transformés distincts I, I', ... dont chacun sera contenu dans q groupes H.

Réciproquement chacun des q^2 groupes H devra contenir $p^{m-\beta}$ sous-groupes de la suite I, I', ...

10. En particulier, les q groupes $H_1, \ldots, H_q$ qui contiennent I (et n'ont aucune autre substitution commune) contiendront en tout

$$1 + q(p^{m-\beta} - 1)$$

sous-groupes de la suite I, I', ... tous distincts. Il restera donc $q - 1$ sous-groupes $I', \ldots, I^{q-1}$ qui ne figurent dans aucun des groupes $H_1, \ldots, H_q$ où I figure.

Les substitutions permutables à I, en nombre $p^{m-\beta} q$, transformant les groupes $H_1, \ldots, H_q$ les uns dans les autres, transformeront exclusivement entre eux les sous-groupes $I', \ldots, I^{q-1}$ qui n'y figurent pas et cela de δ manières différentes, δ étant un diviseur commun à $p^{m-\beta} q$ et à $(q-1)!$

Les substitutions permutables à la fois à chacun des q sous-groupes $I, I', \ldots, I^{q-1}$ seront en nombre $\frac{p^{m-\beta} q}{\delta}$, nombre divisible par q.

11. Associons au contraire à I un système de $q - 1$ autres sous-groupes quelconques $I_1, \ldots, I_{q-1}$. L'un au moins de ces sous-groupes, I_1 par exemple, figurera dans l'un des groupes $H_1, \ldots, H_q$, par exemple dans H_1. Les substitutions permutables à la fois à I, $I_1, \ldots, I_{q-1}$ le seront à H_1; car c'est le seul des groupes H qui contienne à la fois I

et I_1. Mais les groupes H étant en nombre q^2, chacun d'eux ne sera permutable qu'à ses propres substitutions, en nombre p^m. L'ordre du groupe formé par les substitutions permutables à la fois à $I, I_1, \ldots, I_{p-1}$ sera donc un diviseur de p^m.

12. Ainsi à chaque sous-groupe I correspond un groupe unique Δ jouissant de la double propriété suivante : 1° il a pour ordre un multiple de q; 2° ses substitutions sont permutables à q sous-groupes I, $I_1, \ldots, I^{q-1}$ transformés de I. La symétrie de cet énoncé montre qu'à chacun de ces q sous-groupes correspondra le même groupe Δ.

Les sous-groupes I étant au nombre de $p^{m-\beta} q$, il y aura seulement $p^{m-\beta}$ groupes Δ, qui seront permutés les uns dans les autres par les substitutions de G.

Leurs déplacements forment un groupe $\mathcal{G}$ isomorphe à G et de degré $p^{m-\beta}$.

Or, on a

$$q^2 \equiv 1 \bmod p^{m-\alpha}.$$

Donc, $p^{m-\alpha}$ divise $q^2 - 1$; et, comme $q+1$ et $q-1$ ont pour plus grand commun diviseur 2, il divisera $2(q-1)$ ou $2(q+1)$ et ne pourra surpasser ce dernier nombre. Donc

$$p^{m-\beta} \leqq \frac{2(q+1)}{p^{\beta-\alpha}} < 2q \qquad (\text{car } \beta > \alpha).$$

Donc G, admettant un isomorphe $\mathcal{G}$ de degré $< 2q$, sera composé.

Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques;

PAR M. HADAMARD.

Dans un Mémoire précédent [1], nous avons appliqué les considérations élémentaires de maximum et de minimum à l'étude des géodésiques réelles sur des surfaces quelconques et considéré, en particulier, un cas où les énoncés obtenus prennent une forme particulièrement simple : celui des surfaces à courbure partout positive. Je me propose actuellement de traiter, en me plaçant au même point de vue, c'est-à-dire en restant dans le domaine réel et faisant complètement abstraction de la nature analytique de la surface, le cas où la courbure est partout négative. Dans ce nouveau cas, il est possible d'arriver à des résultats beaucoup plus complets que dans le premier et d'établir sans difficulté une discussion générale des géodésiques.

Les principes mis en œuvre sont d'ailleurs les mêmes que dans le Mémoire précédent. Toutefois, j'ai reconnu que le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques est susceptible de remplacer, dans la plupart des démonstrations, les considérations de Calcul différentiel dont je m'étais servi à cet endroit; de sorte que, dans presque toute la suite de ce travail, nous disposerons de deux voies, toutes deux extrêmement élémentaires, pour établir chacune de nos propositions. Une seule théorie exige d'être approfondie d'une façon spéciale pour

[1] Ce *Journal*, même série, t. III, p. 331-388; 1897.

servir de base au travail actuel : c'est l'*Analysis situs* [1], laquelle, ainsi qu'on devait s'y attendre après la lecture des travaux de M. Poincaré, joue un rôle essentiel dans tout ce qui va suivre.

Si la méthode employée est simple, par contre les résultats auxquels nous parviendrons sont compliqués ou, du moins, très différents de ceux que l'on est habitué à rencontrer. C'est cette complication même qui est instructive, en mettant en évidence ce qu'a d'exceptionnel la simplicité des discussions obtenues par l'intégration directe, dans les cas où elle est possible, et en montrant combien ces discussions simples donnent une idée fausse de ce qui se passe dans le cas général.

I. — Forme générale de la surface. Nappes infinies évasées et non évasées.

1. Les surfaces que nous considérerons seront supposées dépourvues de singularités à distance finie. Une telle surface est divisible en régions empiétant les unes sur les autres de manière que tout point de la surface soit intérieur au moins à l'une d'entre elles, et telles que les points d'une quelconque de ces régions aient leurs coordonnées cartésiennes exprimables à l'aide de deux paramètres α, β et cela *régulièrement*, c'est-à-dire par des fonctions continues et dérivables au moins jusqu'à un ordre déterminé, les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)},\quad \frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)},\quad \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$$

n'étant pas tous nuls. Cette dernière condition revient d'ailleurs à celle-ci : qu'ayant mis l'élément linéaire sous la forme

$$E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2,$$

la quantité $EG - F^2$ doit être différente de zéro.

[1] Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Brunel, que sa connaissance profonde de cette partie de la Science a mis à même de me fournir une aide précieuse, particulièrement en démontrant le théorème que j'invoque au n° 33.

Aux paramètres α, β on peut d'ailleurs substituer d'autres paramètres α_1, β_1 donnés par les relations

$$(1) \qquad \alpha = \varphi(\alpha_1, \beta_1), \qquad \beta = \psi(\alpha_1, \beta_1),$$

pourvu que, dans la région considérée, les fonctions φ et ψ soient continues et dérivables, le déterminant fonctionnel de (α, β) par rapport à (α_1, β_1) étant différent de zéro : condition qui sera vérifiée si, en remplaçant α, β par leurs valeurs (1) dans l'élément linéaire, de manière que celui-ci prenne la forme

$$E_1 d\alpha_1^2 + 2F_1 d\alpha_1 d\beta_1 + G_1 d\beta_1^2,$$

le nouveau discriminant $E_1 G_1 - F_1^2$ est différent de zéro $\left\{\text{puisqu'on a } \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{EG - F^2} = \left[\frac{D(\alpha, \beta)}{D(\alpha_1, \beta_1)}\right]^2\right\}$.

Rappelons que, dans ces conditions, si α_1^0, β_1^0 sont les valeurs de α_1, β_1 correspondant aux valeurs α^0, β^0 de α, β, à tout système de valeurs α, β suffisamment voisines de α^0, β^0 correspondra un système de valeurs de α_1, β_1 très voisin de α_1^0, β_1^0 et *un seul;* de sorte que si l'on fait varier le point (α, β) continûment sur un chemin déterminé, compris tout entier dans la région, les quantités α_1, β_1 varieront aussi continûment et seront déterminées sans ambiguïté par cette condition, en un point quelconque de ce chemin (en supposant données leurs valeurs initiales); et si, de plus, α, β sont dérivables par rapport à la variable dont ils dépendent, il en sera de même de α_1, β_1.

2. Nous ne supposons pas, d'ailleurs, que nos surfaces soient algébriques, ni même analytiques; toutefois nous ferons, chemin faisant, sur la forme générale de ces surfaces, des hypothèses simples qui sont toujours vérifiées sur les surfaces algébriques.

3. En outre, nos surfaces seront à courbure partout négative : les points de courbure nulle, s'il y en a, seront isolés et en nombre fini, de sorte que l'on pourra prendre un nombre positif ε assez petit pour que, dans une position limitée quelconque de la surface, la courbure soit partout plus petite (algébriquement) que $-\varepsilon$, à l'exception d'un

certain nombre d'aires dont toutes les dimensions seront inférieures à une quantité donnée quelconque. On verra, d'ailleurs, aisément que nos théorèmes fondamentaux subsistent dans des conditions un peu plus générales; il peut exister certaines lignes de courbure nulle ou même des régions où la courbure est positive, pourvu que ces régions soient suffisamment restreintes et que la courbure y soit suffisamment petite.

4. A l'inverse des surfaces à courbure positive et non infiniment petite, lesquelles sont toujours fermées, les surfaces dont il est question actuellement ont nécessairement des nappes infinies. Cette proposition s'établit immédiatement en remarquant que si la coordonnée x, par exemple, avait un maximum ou un minimum en un point de la surface, la courbure en ce point serait positive ([1]).

5. Plus généralement, on voit que, pour une portion limitée quelconque S' de la surface, le maximum et le minimum de la distance à un plan déterminé quelconque ont lieu sur les contours limites, de sorte qu'un plan ne peut couper S' sans couper ceux-ci.

Cette remarque, qui présente une certaine analogie avec les faits qui se rencontrent dans la théorie des fonctions harmoniques, paraît imposer à la forme des surfaces à courbures opposées, des lois assez précises. Nous aurons à l'utiliser un peu plus loin.

6. Il est intéressant de remarquer que l'existence de nappes infinies peut également s'établir en partant de la relation de Gauss-Bonnet

$$(2) \qquad \int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g} = \int\int \frac{d\sigma}{RR'}.$$

Rapportons à cet effet la sphère de rayon 1 à un système de méridiens et de parallèles de pôles a, a' (ces pôles n'ayant point de situation exceptionnelle par rapport à la représentation sphérique de la surface

([1]) Le raisonnement semble être mis en défaut par les points de courbure nulle. Il est aisé de voir que le maximum ou le minimum ne peuvent avoir lieu même en ces points, du moins s'ils sont isolés.

considérée); si nous entourons les points a, a' de deux parallèles infiniment petits s, s', ces parallèles serviront de représentation sphérique à un certain nombre de courbes très petites $S_1, S_2, \ldots, S_n$, entourant autant de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la surface donnée; soit Σ ce qui reste de la surface donnée quand on enlève les petites aires intérieures aux courbes $S_1, S_2, \ldots, S_n$. En tout point de Σ, nous prendrons, suivant la méthode de M. Darboux, un trièdre attaché à la surface, en lui donnant pour axe des x la tangente correspondant à la tangente au parallèle sphérique, c'est-à-dire la conjuguée de la tangente parallèle à la tangente (T) au méridien sphérique. Si la courbure est partout négative et non nulle, nous aurons ainsi un trièdre mobile vérifiant, sur toute la surface Σ, les conditions moyennant lesquelles a lieu la relation (2). Or, en appliquant celle-ci à l'aire Σ, nous devrons faire d'abord $\int d\omega = 0$, sur tous les contours limites, puisque la tangente en chaque point de ceux-ci est l'axe des x du trièdre correspondant. D'autre part, l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$, prise le long d'un contour infiniment petit tel que S_i, considéré comme limitant l'aire Σ, est approximativement égale à l'intégrale $-\int \frac{ds^*}{\rho}$ étendue à la projection d'une aire infiniment petite sur son plan tangent, c'est-à-dire à -2π. L'équation (2), où le premier membre est positif et le second négatif, met alors en évidence la contradiction.

7. Relativement aux nappes infinies dont nous venons de constater l'existence, nous allons faire une des hypothèses que nous avons annoncées au n° **2**.

Soit encore S' une partie finie de la surface, limitée par certaines courbes fermées $C_1, C_2, \ldots, C_n$. *Nous supposerons que, si ces courbes ont été convenablement choisies, on peut les faire varier continûment de manière à les éloigner toutes à l'infini* (par conséquent à faire tendre S' vers la surface entière S), *sans que, dans cette variation, la surface S' cesse de rester identique à elle-même, au point de vue de la Géométrie de situation.*

Il est clair que, dans ces conditions, ce qui reste de S après enlèvement de S', se compose (du moins si les courbes C ont été convenable-

ment choisies) de n parties infinies indépendantes entre elles, les *nappes* infinies, chacune de ces nappes étant limitée par une des courbes C et pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de cette courbe lorsque, partant de sa position initiale, elle s'éloigne à l'infini.

Moyennant l'hypothèse précédente, nous pourrons appliquer à notre surface l'*Analysis situs* ordinaire, les propriétés topologiques de S étant, *par définition*, celles de la surface S′ à un moment quelconque de sa variation.

8. En particulier, une nappe infinie devra être considérée, au point de vue topologique, comme limitée, d'une part par la courbe C correspondante dans sa position première; d'autre part, par cette même courbe dans une position très éloignée. Nous noterons ce fait, essentiel pour la suite, qu'une telle aire a son ordre de connexion égal à 2. Elle équivaut, pour la Géométrie de situation, à une couronne circulaire.

On voit, de plus, qu'*à chaque nappe infinie correspond un bord de la surface* (¹).

On connaît certaines surfaces à courbures opposées pour lesquelles l'hypothèse du n° **7** n'est pas vérifiée. Telle est, par exemple, la surface minimum de Neovius (²), qui présente une infinité de trous équidistants les uns des autres dans trois directions rectangulaires. Nous écarterons de telles surfaces, auxquelles, d'ailleurs, la théorie qui va suivre pourrait sans doute se généraliser sans trop de difficulté.

9. La représentation sphérique de S se composera en général de plusieurs feuillets. Elle sera topologiquement équivalente à S si celle-ci est à deux côtés, puisqu'alors il y aura entre elles correspondance univoque.

La courbure gardant un signe invariable, les feuillets (ainsi que cela

(¹) Il est bien entendu que nous n'établissons aucune connexion entre deux nappes infinies qui se rejoindraient si l'on ramenait le plan de l'infini à distance finie par une transformation homographique. Ainsi, à notre point de vue, la surface gauche de révolution sera dite avoir *deux* nappes infinies.

(²) Helsingfors, 1883.

arrivait déjà dans le cas de la courbure positive) ne se raccorderont par aucun pli ni aucun autre mode de connexion, tel que les aires changent de sens quand on passe d'un feuillet à l'autre. Ils ne présenteront même aucun raccordement ni aucune autre singularité tant que la courbure sera négative. Il n'en sera pas de même si la courbure s'annule en certains points particuliers : par exemple, si en un point O (supposé, bien entendu, non singulier sur la surface), les deux courbures s'annulent, il est aisé de voir qu'à ce point correspond, pour la représentation sphérique, une ramification riemannienne.

10. A chaque bord C de la surface limitée S′ correspondra un bord c de la représentation sphérique. Mais il y a plus : si le nombre des feuillets de cette représentation sphérique est fini (ce qui lui assigne une aire finie), elle a un bord bien déterminé correspondant à chaque nappe infinie de la surface *illimitée* S. Car, puisque le signe de la courbure est invariable, si la courbe C va toujours en s'éloignant, l'aire limitée par c ira toujours en s'étendant : cette courbe coupera donc une ligne quelconque en des points qui se déplaceront dans un sens invariable sans pouvoir s'éloigner indéfiniment. Elle tendra, par conséquent, vers une courbe limite β.

Celle-ci peut d'ailleurs fort bien se réduire à un point : c'est ce qui arrive, par exemple, pour une surface de révolution dont la méridienne a une direction asymptotique perpendiculaire à l'axe.

L'aire sphérique délimitée par la courbe c ayant une limite, il en est de même pour l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\rho_g}$$

étendue à la courbe C, sur la surface donnée.

11. On obtient des relations dont l'étude présenterait peut-être quelque intérêt en prenant pour direction de l'axe des x du trièdre mobile, considéré au n° **6**, la direction de la tangente (T) au méridien sphérique et non la direction conjuguée. Rien ne sera changé dans les diverses quantités qui figurent dans la relation (2), à l'exception de l'angle ω qui est changé en un autre angle ω_1. Si l'on retranche membre

à membre la nouvelle relation ainsi obtenue de la primitive, il vient

$$(3) \qquad \int d(\omega - \omega_1) = 0,$$

l'intégrale étant étendue, d'une part aux contours infiniment petits S_1, S_2, ..., S_n, dont il a été question au n° **6**, d'autre part aux nappes infinies.

Cette équation ne contient évidemment que des nombres entiers, chaque intégrale étant un multiple de 2π, puisqu'elle exprime la variation de l'angle que fait la tangente (T) avec sa conjuguée.

Le long de chaque contour S_i, cette variation est égale à -4π, puisque la tangente à ce contour tourne de -2π et que la tangente (T) tourne en sens contraire de la première.

On voit que la conclusion serait toute différente si, au point A_i, la courbure était positive. Alors, en effet, les deux tangentes tourneraient dans le même sens et la variation serait nulle. Si donc on appliquait la formule (3) à une surface à courbure de signe variable, il n'y aurait à tenir compte que des contours S_i tracés autour de points où la courbure est négative. Mais, par contre, il conviendrait d'ajouter des termes correspondant à certains points de courbure nulle, ceux pour lesquels la direction de courbure nulle est parallèle à (T). On constate aisément que les points paraboliques doivent être divisés en deux classes et qu'à chaque point où une direction de courbure nulle est parallèle à (T) correspond, dans le premier membre de la formule (3), le terme $\pm 2\pi$, suivant la classe à laquelle appartient ce point.

Des termes additionnels doivent également être introduits dans la formule si la représentation sphérique présente les singularités indiquées au n° **9**.

12. Les remarques des n^{os} **9-11** ne nous seront pas nécessaires au point de vue de la théorie des lignes géodésiques. Il n'en est pas de même d'une distinction essentielle qu'il nous reste à établir relativement à la forme des nappes infinies.

Considérons encore une telle nappe comme engendrée par le déplacement d'une courbe mobile C. En général, quelle que soit la loi de variation de cette courbe sur la surface, sa longueur totale augmentera

indéfiniment à mesure qu'elle s'éloignera. C'est ce qui a lieu pour les nappes infinies du paraboloïde hyperbolique, de l'hyperboloïde à une nappe, de l'alysséide, etc. De telles nappes infinies seront dites *évasées*.

Au contraire, nous nommerons nappes *non évasées* celles sur lesquelles on peut faire occuper à la courbe C une série de positions de plus en plus éloignées dans chacune desquelles son périmètre reste inférieur à une limite déterminée [1]. Telle est, par exemple, une surface de révolution dont la méridienne a une asymptote parallèle à l'axe.

15. Dans l'exemple précédent, on voit qu'il existe une direction asymptotique. La remarque fondamentale du n° **3** va nous permettre de montrer qu'il y a là un fait général.

Soit, en effet, C_0 la position primitive de la courbe C,

$$C_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

la même courbe dans une série de positions, très éloignées pour ν très grand, telles que les longueurs des courbes C_ν soient toutes inférieures à une même quantité donnée.

Plus généralement, il nous suffira de supposer que l'angle maximum sous lequel une courbe C_ν est vue de l'origine soit nul pour ν infini. Dans ces conditions, en effet, il existera au moins une direction δ telle que la droite joignant l'origine à un point quelconque de C_ν fasse avec δ un angle plus petit qu'un angle quelconque donné η, et cela pour une infinité de valeurs (convenablement choisies) de ν, valeurs que nous considérerons à l'exclusion des autres. Mettons que cette direction soit la verticale ascendante.

Soit Γ un cylindre vertical convexe qui contient C_0 à son intérieur; nous le limiterons par une section droite qui laisse C_0 en dessus et nous

[1] Cette série de positions n'est pas nécessairement continue : nous n'excluons pas l'hypothèse où la courbe C, dans son mouvement, aurait tantôt une longueur très grande et tantôt une longueur finie. Il apparaîtra que cette hypothèse est inadmissible.

ferons tourner chaque plan tangent au cylindre, autour de son intersection avec le plan de section, d'un angle très petit ε, vers l'extérieur. La courbe C_0 sera du même côté que Γ par rapport à chacun des plans ainsi obtenus, et il en sera de même de la courbe C_ν pour $\eta_i < \varepsilon$. Donc la nappe infinie est d'un seul côté d'un quelconque de ces plans et, comme ceci a lieu quelque petit que soit ε, toute la nappe infinie est intérieure à Γ : δ est donc une direction asymptotique. On peut même ajouter que les cylindres verticaux convexes, circonscrits aux positions successives de la courbe C, sont tous intérieurs les uns aux autres, de sorte qu'ils tendent vers une position limite.

En particulier, si les projections horizontales des C_ν sont des courbes convexes, il y a un cylindre asymptote. Il est probable que le même résultat doit pouvoir se démontrer lorsque ces projections présentent des arcs concaves.

14. Il en est de même pour une propriété voisine, mais qui concerne le plan tangent.

Soient (C) une section horizontale de la nappe infinie non évasée, M un point de (C) situé sur le contour convexe de la courbe, c'est-à-dire tel que la tangente (t) en ce point laisse toute la courbe d'un seul côté que nous appellerons, pour abréger, le *côté intérieur*.

Le plan vertical V qui projette horizontalement (t) coupera nécessairement C_0 (puisque le point M est intérieur à tout cylindre vertical convexe contenant cette courbe), et la tangente (t) divise ce plan en deux demi-plans, l'un V′ inférieur, l'autre V″ supérieur. Nous ferons tourner le demi-plan V′ autour de (t), vers l'extérieur, d'un angle tel qu'il vienne à toucher C_0 et le plus grand possible d'ailleurs : cet angle sera évidemment très petit si la courbe (C) a été prise très éloignée. Le plan P ainsi obtenu laisse d'un seul et même côté les courbes (C) et C_0 et par suite aussi toute la portion de surface comprise entre elles. Donc le demi-plan tangent inférieur en M [nous voulons dire la portion du plan tangent en M située au dessous de (t)] est, par rapport à P, du côté intérieur.

Mais, d'autre part, le demi-plan tangent supérieur est, comme nous le savons, à l'intérieur de V″.

Donc le demi-plan tangent inférieur est compris dans le dièdre V P

et, par conséquent, *l'angle de ce plan avec la verticale tend vers zéro.*

Il ne paraît pas douteux que ce fait ne subsiste même lorsqu'on choisit le point M sur une partie rentrante de (C). En tout cas, nous pouvons admettre qu'il en est ainsi; cette hypothèse est une de celles que nous nous sommes réservé le droit de faire, puisque, sur une surface algébrique, l'angle du plan tangent avec la droite qui joint l'origine au point de contact tend vers zéro.

Le bord de la représentation sphérique, correspondant à une nappe infinie non évasée, se compose d'un grand cercle ou d'une série d'arcs appartenant à un même grand cercle.

15. Il résulte de là que la limite vers laquelle tend (n° **10**) l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ prise le long de la courbe C, lorsque celle-ci s'éloigne indéfiniment, est nulle.

Pour le voir, on prendra comme courbes C les sections horizontales. Dans l'expression $\frac{ds}{\rho_g} = \frac{ds}{\rho} \sin \varpi$ ([1]), l'angle ϖ, compris entre la normale en un point M de C et le plan horizontal, n'est autre que la hauteur (au sens astronomique du mot) de la représentation sphérique m de M, pendant que le facteur $\frac{ds}{\rho}$ est égal à l'angle élémentaire dont tourne la tangente horizontale à la surface, c'est-à-dire à la variation élémentaire de l'azimut θ du point m.

L'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ est donc égale à $\int \sin \varpi \, d\theta$, c'est-à-dire à l'aire comprise entre la courbe c et le grand cercle horizontal, aire qui est infiniment petite dans les conditions actuelles.

Les nappes non évasées se présentent dans la théorie actuelle comme un cas singulier, une sorte de cas limite offrant des particularités et des difficultés analogues à celles qu'introduisent les racines multiples de l'équation caractéristique dans la réduction des substitutions linéaires. En raison de ce fait que la limite de $\int \frac{ds}{\rho_g}$ est nulle, on doit les considérer comme ayant une géodésique fermée rejetée à l'infini.

([1]) Darboux, *Leçons*, Livre V.

16. La nature de la surface, au point de vue de la Géométrie de situation, dépend, comme on sait, du nombre des bords (c'est-à-dire, pour nous, des nappes infinies) et du nombre des *trous*, caractérisés par les contours fermés qu'on peut tracer sur elle sans la démembrer.

Les surfaces à courbures opposées généralement connues ont toutes leur ordre de connexion égal à 1 (paraboloïde hyperbolique) ou à 2 (hyperboloïde à une nappe).

Mais on peut former des surfaces à courbures opposées ayant un nombre quelconque de nappes infinies. Telles sont, entre autres, les surfaces représentées par des équations du type

$$(4) \qquad z = k \log \frac{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n},$$

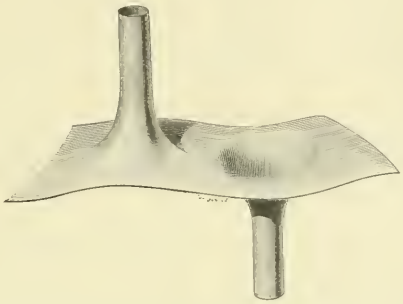
où (k étant une constante) les quantités $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m; \delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ sont les distances du point (x, y), projection d'un point quelconque de l'espace sur un plan horizontal pris comme l'un des plans coordonnés, à autant de points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_m, P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ de ce plan. Cette surface est à courbures partout opposées, car le second membre est la partie réelle d'une fonction de la variable complexe $x + iy$; elle a d'ailleurs $m + n + 1$ nappes infinies, dont m dirigées du côté des z positifs, n du côté des z négatifs, et une s'étalant dans le sens horizontal. Par exemple, la surface

$$(4') \qquad z = k \log \frac{\delta}{\delta'},$$

correspondant à $m = n = 1$, a la forme générale représentée par la *fig.* 1. Elle possède un plan de symétrie, le plan vertical mené par PP'; un axe de symétrie, la perpendiculaire au milieu de PP', et un centre de symétrie. A ce dernier point correspond, sur la sphère, un point O qui est une ramification riemannienne de la représentation sphérique (**9**); effectivement, celle-ci se compose de deux feuillets correspondant aux deux moitiés de la surface, séparées l'une de l'autre par l'axe de symétrie et qui se croisent suivant l'arc de grand cercle qui va du pôle supérieur au point O; elle présente trois bords, l'un (correspondant à la nappe horizontale) constitué par un contour

infiniment petit tournant deux fois autour du pôle supérieur, les deux autres tracés, dans chacun des feuillets, suivant le grand cercle horizontal.

Fig. 1.



Les nappes infinies verticales ne sont pas évasées; si l'on désirait qu'elles le devinssent, il suffirait d'augmenter le rayon de chaque section horizontale d'une quantité proportionnelle à z^p (p étant un nombre impair) sans changer le centre de cette section. La même opération pourrait s'appliquer à la surface plus générale (4); les nappes situées d'un même côté du plan horizontal se rencontreraient; mais ceci ne constitue pas une singularité de nature à empêcher nos raisonnements d'être valables : il suffira de regarder comme entièrement indépendantes l'une de l'autre les nappes qui se croisent.

17. Un cas limite de la surface (4') est évidemment la suivante :

$$(5) \qquad z = \frac{kx}{x^2+y^2} = \text{partie réelle de } \frac{k}{x+iy}.$$

Mais cette dernière peut être envisagée à un point de vue tout différent : son équation résulte, en effet, de l'élimination de u entre les relations

$$(6) \qquad x^2+y^2 = xu,$$

$$(7) \qquad z = \frac{k}{u},$$

dont la première (x, y, u étant comme des coordonnées cartésiennes) représente un cône, c'est-à-dire une surface de courbure nulle. Ceci conduit à envisager, plus généralement, la surface résultant de l'élimination de u entre les relations

$$u = f(x, y). \tag{8}$$

$$z = \varphi(u). \tag{9}$$

Si l'on désigne, comme d'ordinaire, par p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de z, par p', q', r', s', t' les dérivées correspondantes de u, il vient aisément

$$rt - s^2 = (r't' - s'^2)\varphi'^2 + \varphi'\varphi''(r'q'^2 - 2s'p'q' + t'p'^2);$$

par conséquent on voit que la surface considérée est à courbure négative, si : 1° la surface (8) est à courbure nulle ou négative ; 2° la courbe plane représentée par l'équation $u =$ const. tourne partout sa concavité du côté des u croissants ou du côté des u décroissants, suivant que la fonction φ' est elle-même croissante ou décroissante en valeur absolue, c'est-à-dire suivant que la courbe représentée (en coordonnées rectilignes z et u) par l'équation (9) tourne sa concavité du côté des u négatifs ou du côté des u positifs.

Si, par exemple, la fonction $u = f(x, y)$ est celle qui est définie par l'équation (6), les courbes $u =$ const. tournent leur concavité vers les u décroissants en valeur absolue. Il suffira donc que l'équation (9) représente une courbe tournant partout sa convexité vers l'axe $u = 0$; nous pourrons, par exemple, d'une infinité de manières, prendre

$$u = \mathrm{R}(z),$$

R étant une fraction rationnelle convenablement choisie. La surface algébrique ainsi obtenue aura autant de nappes infinies que la fonction R a de discontinuités, plus deux ; et toutes ces nappes seront évasées si cette fonction devient infinie en même temps que z.

La surface aura, il est vrai, une ligne de courbure nulle. On fera disparaître cet inconvénient en déplaçant chaque section $z =$ const.

parallèlement à l'axe des x, d'une quantité égale à une fonction convenablement choisie de z.

18. Nous venons d'obtenir des surfaces à courbure négative présentant un nombre quelconque de nappes infinies; le procédé suivant va nous fournir, au contraire, des surfaces offrant un nombre plus ou moins grand de trous.

Soient $U = 0$, $V = 0$ les équations de deux surfaces à courbures opposées. L'équation

$$UV = \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0 \tag{10}$$

représente une surface composée de deux surfaces partielles, l'une située dans la région $U > 0$, $V > 0$; l'autre dans la région $U < 0$, $V < 0$. Comme nous n'avons à nous occuper ici que de surfaces connexes, nous ne considérerons qu'une seule de ces deux surfaces partielles : la première, par exemple, et même une partie connexe de cette première. Nous aurons ainsi une surface qui sera évidemment à courbures opposées en tout point situé à distance finie et non dans le voisinage d'une courbe d'intersection des deux surfaces primitives, et que l'on pourra même supposer à courbures opposées à l'infini en prenant, au besoin, pour ε, non pas une constante, mais une fonction toujours positive et diminuant plus ou moins rapidement lorsque x, y, z augmentent; par exemple

$$\varepsilon = \frac{\eta}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^p},$$

η étant une constante très petite.

Pareillement, si les surfaces $U = 0$, $V = 0$ ont des points de courbure nulle, on fera figurer dans ε ou dans η un facteur s'annulant en ces points ainsi que ses dérivées, jusqu'à un ordre convenable.

Reste le voisinage d'une courbe d'intersection des deux surfaces primitives. On constate aisément que la courbure de la surface (10) reste négative même aux environs d'une telle courbe, si celle-ci tourne sa

convexité vers la région $U > 0$, $V > 0$, c'est-à-dire si sa tangente passe dans cette région.

Considérons, par exemple, les deux hyperboloïdes

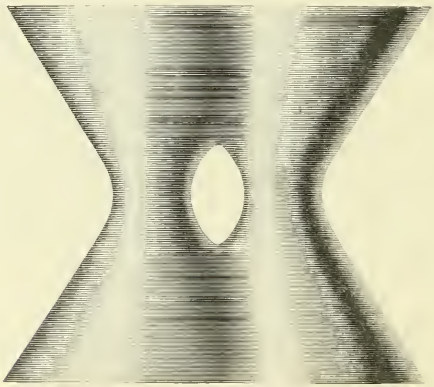
$$U = \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$V = \frac{(x+\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

qui se coupent suivant une hyperbole. La partie de la surface $UV = \varepsilon$ située dans la région $U > 0$, $V > 0$ est à courbure négative. Sa forme générale est représentée *fig.* 2 ; elle a deux nappes infinies et un trou.

En associant de même un nombre quelconque d'hyperboloïdes

Fig. 2.



égaux ayant un axe transverse suivant une même droite, on aurait une surface à un nombre quelconque de trous, avec deux nappes infinies.

On obtient un résultat analogue en associant la surface

$$z = k \log \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m$$

[cas particulier de la surface (4)] avec sa symétrique par rapport à un

plan parallèle au plan des xy et de z positif. On a ainsi deux nappes infinies et $m-1$ trous.

Enfin, on peut obtenir un nombre plus élevé de nappes infinies, jointes à des trous, en combinant la surface

$$z = \frac{k \log \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m}{\delta'}$$

avec ses symétriques successives par rapport à un certain nombre de plans parallèles.

19. On obtient encore une surface à courbures opposées et à plus de deux nappes infinies en partant, comme l'indique M. Brunel [1], de l'hyperboloïde de révolution à une nappe coupant cette surface par les différents plans qui passent par un diamètre déterminé Oy du cercle de gorge et faisant tourner chaque section, autour de Oy, d'un angle égal à la moitié de l'angle φ que fait son plan primitif avec le plan équatorial.

Plus généralement, au lieu de diminuer l'angle que fait une section quelconque avec le plan équatorial dans le rapport de 1 à 2, on peut diminuer ce même angle dans le rapport de 1 à p (p entier); la nouvelle surface ainsi obtenue est représentée paramétriquement, en fonction de φ et d'un rayon vecteur ρ, par les formules

$$x = \rho \sin \varphi,$$
$$y^2 = a^2 + \rho^2 \cos 2p\varphi,$$
$$z = \rho \cos \varphi.$$

L'équation du plan tangent sera

$$(dx \sin \varphi + dz \cos \varphi) \cos 2p\varphi + p(dz \sin \varphi - dx \cos \varphi) \sin 2p\varphi - \frac{y\,dy}{\rho} = 0.$$

---

[1] *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 4 mars 1897.

et les quantités D, D′, D″ de Gauss [1] pourront être prises égales à

$$D = -\frac{\cos 2p\varphi}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^2}{y^2}\cos 2p\varphi\right) = -\frac{a^2\cos 2p\varphi}{\rho y^2},$$

$$D' = p\sin 2p\varphi\left(1 - \frac{\rho^2}{y^2}\cos 2p\varphi\right) = \frac{a^2 p\sin 2p\varphi}{y^2},$$

$$D'' = \rho\left[\cos 2p\varphi(2p^2 - 1) + \frac{p^2\rho^2}{y^2}\sin^2 2p\varphi\right];$$

d'où

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 = \frac{a^2}{y^2}\Big[&-\cos^2 2p\varphi(2p^2 - 1) \\ &- \frac{p^2\rho^2}{y^2}\cos 2p\varphi\sin^2 2p\varphi - \frac{p^2a^2}{y^2}\sin^2 2p\varphi\Big] \\ = -\frac{a^2}{y^2}&[p^2\sin^2 2p\varphi + (2p^2 - 1)\cos^2 2p\varphi]. \end{aligned}$$

La surface est donc à courbures partout opposées. Elle admet comme seuls points singuliers (à distance finie) les points $x = z = 0$, $y = \pm a$; mais, ainsi qu'on s'en assurera sans difficulté, ces singularités ne sont point de nature à empêcher la validité des raisonnements qui vont suivre. Enfin cette surface possède $2p$ nappes infinies.

II. — Considérations d'Analysis situs.

20. Ayant reconnu, dans les numéros précédents, l'existence de surfaces à courbures opposées et à connexion quelconque, nous avons à rappeler les principes qui gouvernent l'étude des lignes tracées sur de telles surfaces : principes posés par M. Jordan dans un Mémoire bien connu [2].

Nous dirons que deux contours fermés tracés sur la surface appartiennent à la même *espèce* s'ils sont réductibles l'un à l'autre par une déformation continue, effectuée sur cette surface.

---

[1] *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Liv. V, Chap. II, et Liv. VII, Chap. III.

[2] Ce Journal, année 1866. Comme le fait M. Jordan, nous supposerons, pour simplifier, nos surfaces à deux côtés.

L'énumération des différentes espèces de contours fermés repose sur la considération des *contours élémentaires*. Ceux-ci sont de deux sortes :

1° Ceux qui équivalent respectivement aux différents bords de la surface ;

2° Ceux qui correspondent par paires aux différents trous (s'il en existe).

Les premiers joueront, à notre point de vue, un rôle spécial. Nous les désignerons sous le nom de *contours simples*.

On sait que, dans beaucoup de questions, le choix des contours élémentaires comporte un certain degré d'arbitraire, ces contours pouvant être remplacés par d'autres en nombre égal, tels que chacun des deux systèmes puisse se déduire de l'autre. Il en sera encore de même ici, mais non pas pour ce qui concerne les contours simples. Il reste entendu que chacun de ceux-ci équivaut à un bord déterminé (correspondant à une nappe infinie déterminée) de la surface.

Un contour quelconque est réductible à une suite de contours élémentaires parcourus dans des sens déterminés et dans un ordre déterminé, autrement dit représentable par un symbole (produit) de la forme

$$ABC\ldots, \tag{11}$$

chacune des lettres (facteurs) A, B, C, ... étant le symbole C_i d'un contour élémentaire ou le symbole C_i^{-1} d'un contour C_i décrit en sens inverse, et ces symboles étant ou non distincts les uns des autres : expression qui peut encore s'écrire

$$C_i^m C_{i'}^{m'} C_{i''}^{m''}, \tag{12}$$

chaque indice étant, cette fois, distinct du précédent et du suivant et les exposants m, m', ... étant des entiers positifs ou négatifs, mais qu'on peut supposer non nuls (sauf dans le cas où l'espèce considérée est celle des contours réductibles à un point).

Le symbole C^m (C étant un contour quelconque), qui représente le contour C décrit m fois dans un sens déterminé si m est positif et ce

même contour décrit $|m|$ fois en sens inverse si m est négatif, sera dit correspondre à un *multiple* de C.

21. Les contours élémentaires ne sont pas tous indépendants. Il existe entre eux une relation, et une seule, qui permet de regarder l'un quelconque des contours élémentaires comme une combinaison des autres et, par conséquent, de l'éliminer de l'une quelconque des expressions (11) ou (12).

C'est ainsi que, dans le cas de la connexion simple, il n'y a aucun contour non réductible à un point; et que, sur une surface à connexion double, les contours élémentaires se réduisent à un seul.

Mais, une fois l'un des contours éliminé comme il vient d'être dit, *l'expression* (12) *est parfaitement déterminée à une permutation circulaire près.*

22. Il nous arrivera, dans certains cas, de ne pas considérer comme essentiellement distincts d'un contour déterminé ses différents multiples. A ce point de vue, une surface à connexion double n'aurait, comme on le voit, qu'une seule espèce de contours non réductibles.

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse deux, *les contours essentiellement distincts les uns des autres sont en nombre infini.*

Par contre, *il n'y a qu'un nombre fini d'espèces de contours dont la longueur soit inférieure à une longueur donnée quelconque.*

23. Soient maintenant a, b deux points quelconques de la surface.

Nous dirons que deux chemins qui vont de a en b appartiennent au même *type* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue dans laquelle les points a, b restent fixes.

Nous employons le mot *type* au lieu du mot *espèce,* qui nous a servi pour les contours fermés, afin d'éviter certaines confusions, en particulier dans la circonstance suivante :

Supposons que le point b coïncide avec le point a. Les chemins que nous aurons alors à comparer seront des contours fermés partant du point a et y aboutissant.

Or, une infinité de ces chemins peuvent être de même *espèce,* lors-

qu'on les considère comme contours fermés, tout en étant de *types* différents, si on les considère comme lignes joignant le point a à lui-même.

La déformation continue par laquelle on passe d'un de ces chemins à l'autre peut, en effet, être telle que le point a ne puisse rester fixe pendant cette déformation, mais décrive forcément un contour non réductible à un point [1].

24. Les différents types de chemins joignant entre eux deux points (différents ou non) a et b se représentent par des symboles de la forme (11) ou (12); mais ces symboles se distinguent de ceux qui servent aux contours ouverts par cette circonstance que la permutation circulaire des facteurs n'y est pas légitime. Cette différence met bien en évidence le fait que nous venons de signaler au numéro précédent.

25. Il y a une infinité de types de chemins joignant deux points (du moins sur une surface à connexion multiple); mais, *les types auxquels correspondent des chemins de longueur finie sont en nombre fini.*

26. Donnons-nous enfin, sur la surface, un point a et une ligne L. Nous dirons que deux chemins ab, ac, qui partent du point a pour aboutir à la ligne L, sont du même type, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue dans laquelle l'extrémité a reste fixe, pendant que l'autre extrémité décrit la ligne L. Cela revient manifestement à dire que le deuxième chemin ac forme, avec l'arc cb de la ligne L, une ligne allant de a en b et du même type que le premier chemin ab. La notion que nous venons d'introduire n'offre donc rien d'essentiellement nouveau : on représentera un type de chemin allant de a à la ligne L par le symbole d'un type de chemin allant de a à un point déterminé b de L.

Il y a toutefois une remarque importante à faire lorsque la ligne L est fermée. Dans ce cas, en effet, il existe une infinité de manières

---

[1] Cette remarque ne s'applique pas au cas où l'espèce en question est celle des contours réductibles à un point.

différentes d'aller du point b à un autre point c de cette ligne sans la quitter. Si cette ligne est réductible à un point, tous les arcs ainsi obtenus sont équivalents. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas général et l'on voit qu'*on ne doit pas considérer le type comme modifié si l'on fait suivre son symbole du symbole de* L (pris en traitant L comme une ligne joignant le point b à lui-même) *ou d'un de ses multiples.*

27. En particulier, *sur une surface à connexion double tous les chemins qui vont d'un point donné à une ligne fermée donnée (sans point double) sont réductibles les uns aux autres.*

28. Supposons que le point a se déplace sur une ligne déterminée λ aboutissant en un point a'. A chaque type de chemins allant de a à L correspondra évidemment un type déterminé de lignes joignant a' à L, type qui dérivera du premier par continuité.

Si la ligne L' est fermée, de manière que le point a' coïncide avec a, rien ne permet d'affirmer que le type ainsi dérivé coïncidera avec le type primitif. Cette circonstance se produira toutefois dans deux cas :

1° Si la ligne fermée L' est réductible à un point;

2° Si cette ligne est de même espèce que L, le type considéré étant celui du chemin que suit le point a lorsque L' vient, par une déformation continue, coïncider avec L.

III. — Théorèmes fondamentaux. Lignes géodésiques fermées.

29. Une géodésique de la surface est bien déterminée par un de ses *éléments*, c'est-à-dire par un point M (dont les coordonnées curvilignes sont α, β) et l'angle ω que fait la tangente en ce point avec l'axe des x du trièdre (T) attaché à la surface en ce point; α, β et ω seront dits les *coordonnées de l'élément*. Nous pourrons supposer que, dans une région déterminée où nous ferons varier cet élément, la surface soit représentée régulièrement à l'aide des coordonnées α, β et que la position du trièdre (T) y varie continûment.

Dès lors si, sur la géodésique considérée, nous portons, à partir du

point M, une longueur $MM' = u$, les coordonnées de l'élément situé en M′ (lesquelles ne seront pas nécessairement rapportées au même système que celles du point M) seront des fonctions de α, β, ω, u : fonctions continues et dérivables, au moins jusqu'à un certain ordre.

Supposons que le point M varie sur une ligne déterminée L, les coordonnées de ce point étant des fonctions d'un paramètre v, et que la géodésique issue de ce point soit constamment orthogonale à L. Les coordonnées, curvilignes ou cartésiennes, du point M′ seront des fonctions continues et dérivables de u et de v; à des variations infiniment petites de ces quantités correspondra pour M′ un déplacement infiniment petit de longueur

$$ds = \sqrt{du^2 + C^2 dv^2},$$

C étant encore une fonction dérivable de u et de v. On sait que cette quantité est liée à la courbure $K = \frac{1}{RR'}$ de la surface par l'équation

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -CK. \tag{13}$$

Cette dernière entraîne une conséquence fondamentale pour notre objet. Sur les surfaces à courbures opposées, en supposant (ainsi qu'on peut le faire) C positif, il vient

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \geqq 0. \tag{14}$$

30. Les quantités u, v sont-elles, à leur tour, au moins dans une région suffisamment petite, déterminées par la position du point M′? Autrement dit, toute variation infiniment petite du premier ordre de ces quantités entraîne-t-elle un déplacement, infiniment petit du premier ordre, de ce point? Les principes rappelés au n° **1** montrent qu'il en sera nécessairement ainsi toutes les fois que C sera différent de zéro. La région de la surface qui entoure le point M′ sera alors représentée régulièrement par les coordonnées u, v : celles-ci pourront être considérées comme variant continûment lorsque le point M′ se déplacera

continûment en décrivant un chemin quelconque et seront déterminées sans ambiguïté par cette condition.

31. Supposons, en premier lieu, que la ligne L se réduise à un point a : c sera l'angle que fait, avec l'axe des x du trièdre attaché à la surface en a, une géodésique issue de ce point; u, qui sera essentiellement positif, représentera un arc porté, à partir du point a, sur cette ligne (coordonnées polaires géodésiques). On aura, en a,

$$C = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 1;$$

donc, pour toute autre valeur de u,

$$\frac{\partial C}{\partial u} > 1, \tag{15}$$

$$C > u. \tag{16}$$

Voilà donc un cas où la condition $C \neq 0$ est nécessairement vérifiée et nous pouvons dès lors établir notre premier théorème fondamental.

Théorème. — *A chaque type de lignes joignant deux points a et b, correspond un arc de géodésique appartenant à ce type, et il n'en correspond qu'un seul* [1].

1° Considérons un point m qui va de a en b par une ligne quelconque Λ appartenant au type donné. Dans toutes les positions successives de ce point, la géodésique am sera déterminée sans ambiguïté par la double condition de varier continûment et d'avoir une lon-

[1] La proposition d'après laquelle, *sur une surface à courbure négative, deux géodésiques infiniment voisines ne peuvent se couper deux fois*, proposition énoncée par Jacobi (*Vorles. über Dynamik*), a été démontrée par plusieurs géomètres. *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. Von Mangoldt (*Journal de Crelle*, t. 91, p. 23; 1881). M. Von Mangoldt donne, d'après MM. Thomson et Tait, la démonstration, à l'aide du théorème de Gauss, de ce fait que, si la surface est à connexion simple, deux géodésiques qui se coupent sous un angle fini ne peuvent pas non plus se couper à nouveau; il remarque (p. 28) que cette conclusion n'est pas nécessairement exacte s'il y a connexion multiple.

gueur infiniment petite lorsque le point m est infiniment voisin de a.

Le point m venant en b, on obtient la géodésique cherchée.

2° Observons que toute géodésique répondant à la question peut s'obtenir par le procédé qui vient d'être expliqué ; il suffira évidemment, à cet effet, de prendre pour la ligne A cette géodésique elle-même.

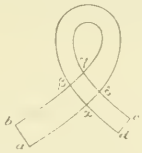
Or les valeurs que prennent les coordonnées u, v du point m, quand ce point vient en b, varient continûment lorsqu'on déforme continûment la ligne A ; elles ne changent donc en aucune façon, car le point b ne peut avoir, relativement au point a, plusieurs systèmes de coordonnées polaires géodésiques infiniment voisins les uns des autres.

32. La première partie de la proposition précédente serait évidente si l'on admettait que la longueur d'un chemin joignant ab et appartenant au type donné a nécessairement un minimum.

Quant à la seconde, il est à observer qu'on pourrait la démontrer en employant le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques, moyennant certaines précautions nécessaires pour l'application de ce théorème aux contours géodésiques qui présentent des points doubles.

Considérons, par exemple, le polygone $abcd$ représenté *fig.* 3. Il est clair qu'un tel polygone peut être considéré comme une somme de polygones géodésiques ordinaires et que le théorème de Gauss peut lui être appliqué sans aucune difficulté, sous la simple condition de compter deux fois la courbure totale du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (*fig.* 3).

Fig. 3.



Un fait analogue aura lieu pour tout polygone géodésique réductible, quels que soient ses points doubles. On devra alors multiplier respectivement les courbures totales des différentes régions que détermine ce contour par des entiers convenablement choisis, qui ne sont autres que les *indices* de Gauss relatifs à ces régions.

Nous raisonnerons exclusivement, dans ce qui va suivre, sur des

contours tels que les indices des différentes régions qu'ils délimitent soient tous positifs, autrement dit, sur des aires polygonales formées de parties additives, que l'on peut regarder comme des *sommes* de polygones ordinaires.

33. Pour démontrer que deux points a, b ne peuvent être joints par deux géodésiques différentes du même type, autrement dit, qu'*un biangle géodésique réductible à un point ne peut exister sur une surface à courbures opposées*, nous remarquerons que cette conclusion est évidente s'il s'agit d'un biangle formé de parties toutes additives, car alors l'égalité qui exprime le théorème de Gauss aurait pour premier membre une quantité positive (la somme des angles du biangle) et pour second membre une courbure totale négative.

Mais, d'autre part, d'après un théorème démontré par M. Brunel [1], si les indices relatifs à un contour réductible ne sont pas tous positifs, celui-ci est décomposé, par l'un au moins de ses points doubles c, en deux contours partiels, tous deux réductibles. L'un au moins de ces derniers ne comprendra pas les deux sommets a, b du biangle et sera, par conséquent, soit un nouveau biangle réductible, soit un *monangle* ou biangle dont un angle est égal à π. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

34. Supposons, en second lieu, que la ligne L, mentionnée aux n^{os} **29-30**, soit une géodésique, de sorte que, u étant la distance normale géodésique d'un point M à L (comptée en grandeur et signe suivant son sens), on ait, pour $u = 0$,

$$C = 1, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 0,$$

et, par conséquent, pour toute valeur de u différente de zéro

$$C > 1, \tag{17}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial u} > 0. \tag{18}$$

---

[1] *Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 1er juillet 1897.

La première inégalité montre encore que la surface est représentée régulièrement par les coordonnées u, v et nous permet, moyennant des raisonnements identiques à ceux du n° **51**, d'énoncer notre second théorème fondamental.

THÉORÈME. — *A tout type de lignes joignant un point donné à une géodésique donnée, il correspond une géodésique normale de ce type et il n'en correspond qu'une seule.*

55. La première partie de ce théorème est évidente, une fois établi le théorème du n° **51**. La seconde peut encore s'établir à l'aide du théorème de Gauss. Il suffit, à cet effet, de remarquer que la géodésique du type considéré, qui joint le point donné a à un point variable m de la géodésique donnée L, tourne toujours dans le même sens lorsque ce point décrit L (le contraire entraînant manifestement la production d'un biangle réductible). Il en résulte qu'un triangle géodésique est toujours formé de parties additives et, par suite, ne peut être birectangle, d'après le théorème de Gauss.

56. Les coordonnées u, v d'un point, rapportées à une géodésique, étant des fonctions bien déterminées de la position de ce point et du type du chemin qui joint ce point à un point déterminé, les raisonnements donnés au n° 521 (t. II, liv. V) des *Leçons sur la Théorie des surfaces*, de M. Darboux, s'appliquent d'une façon entièrement générale et montrent qu'*un arc de géodésique est plus court que tout autre chemin terminé aux mêmes points et de même type.*

57. Si maintenant, au lieu de l'inégalité (17), qui nous a servi à établir notre second théorème fondamental, nous envisageons l'inégalité (18), celle-ci nous montre, par une conséquence tout analogue à celle qui s'offre dans le cas des surfaces à courbure positive [1], que *lorsqu'un point décrit une géodésique* L', *sa distance normale* (*d'un type déterminé quelconque*) *à une géodésique* L *ne peut avoir de*

---

[1] Voir le Mémoire cité : *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique* (ce Journal, 5e série, t. III; n° 18, p. 346-347; 1897).

maximum et croît indéfiniment en valeur absolue, si elle est croissante à quelque moment.

Ce fait essentiel va tout d'abord nous permettre d'énumérer complètement les géodésiques fermées.

THÉORÈME. — *A chaque espèce de contours fermés correspond une géodésique de cette espèce, et il n'en correspond qu'une seule.*

Il n'y a exception que pour les contours simples correspondant aux nappes infinies non évasées.

1° On peut joindre un point quelconque a de la surface à lui-même par une ligne géodésique appartenant à l'espèce donnée. Cela se peut même d'une infinité de façons, puisqu'à cette espèce correspondent une infinité de types de lignes partant du point a et y aboutissant; mais, parmi tous les chemins ainsi obtenus, il n'y en a qu'un nombre fini dont la longueur ne dépasse pas une limite déterminée quelconque (**25**). Donc, il existe un de ces chemins dont la longueur est minimum. Soit l ce minimum, l est une fonction continue de la position du point a, laquelle a par conséquent un minimum lorsque ce point varie sur la surface limitée S'.

Mais, en général, l augmente indéfiniment lorsque le point a s'éloigne indéfiniment.

Donc, l a un minimum sur la surface entière S et ce minimum donne la géodésique fermée cherchée.

Le raisonnement n'est en défaut que si l n'augmente pas indéfiniment avec l'éloignement du point a, ce qui ne peut se présenter que pour les contours correspondant aux nappes infinies non évasées. Nous verrons plus loin qu'il y a réellement exception dans ce cas.

2° Supposons qu'il y ait deux géodésiques fermées L, L' appartenant à l'espèce donnée. Soient m' un point quelconque de L', u sa distance à L, comptée suivant le type du chemin que décrit ce point lorsque L' vient coïncider avec L par une déformation continue. Nous savons (**28**) que la distance u reprend sa valeur initiale lorsque le point M' revient à sa position primitive après description de la ligne L'. Cette distance devrait donc avoir un maximum en valeur absolue, ce dont nous avons démontré l'impossibilité.

Pour obtenir le même résultat par l'application du théorème de Gauss, on remarquerait que les géodésiques abaissées, normalement à L, des positions successives du point M′ ne sauraient s'entre-croiser, sans quoi il se produirait un biangle réductible ou un triangle birectangle réductible; autrement dit, les deux géodésiques L et L′ pourraient être considérées comme délimitant une aire formée de parties additives. L'application du théorème de Gauss à cette aire conduirait à une contradiction.

Remarque I. — Il résulte, soit du n° **31**, soit d'une démonstration analogue à la précédente, qu'*il n'existe pas, sur les surfaces à courbures opposées, de géodésiques fermées réductibles.*

Remarque II. — La géodésique fermée correspondant à l'espèce ε^m n'est évidemment autre que la géodésique fermée d'espèce ε, parcourue $|m|$ fois dans son sens primitif ou en sens inverse, suivant le signe de m.

Ainsi, au point de vue de l'obtention des géodésiques fermées, nous n'aurons pas à considérer d'espèce qui soit multiple d'une autre.

En particulier, *une surface à connexion double n'admet qu'une seule géodésique fermée.*

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse deux, les géodésiques fermées sont en nombre infini. Cette infinité est d'ailleurs évidemment *dénombrable.*

38. On peut remarquer que ces géodésiques fermées en nombre infini forment un ensemble condensé en soi, au sens de Cantor; c'est-à-dire qu'étant donnée une géodésique fermée L, d'espèce ε, il existe une infinité d'autres géodésiques fermées ayant au moins un élément aussi voisin qu'on veut d'un élément déterminé quelconque de L.

IV. — Géodésiques asymptotiques.

39. D'après le n° **37**, si L, L′ sont deux géodésiques, lorsqu'un point m' se meut indéfiniment (dans un sens déterminé) sur L′, sa distance à L, relative à un type déterminé quelconque, ne peut varier que d'après les trois lois suivantes :

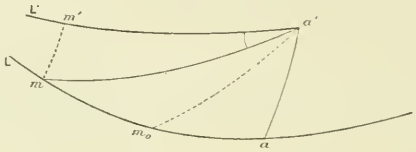
1° Croître constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou décroître constamment de $+\infty$ à $-\infty$ (on peut dire alors que les deux lignes *se coupent suivant le type considéré*);

2° Partir de $\pm\infty$ et y revenir après un minimum de valeur absolue;

3° Partir de $\pm\infty$ pour tendre vers zéro sans jamais changer de signe ni de sens de variation (ou la variation inverse).

La possibilité des deux premiers cas est évidente. Celle du troisième s'établit par les considérations bien connues qui s'offrent dans la Géométrie non euclidienne. Soit a' un point de la surface, A une géodésique joignant ce point à un point a d'une géodésique L. Considérons un point m qui s'éloigne indéfiniment sur L, dans un sens déterminé, à partir du point a (*fig.* 4) et traçons la géodésique $a'm$ du type A.

Fig. 4.



L'angle $\widehat{ma'a}$ va constamment en croissant; il reste constamment inférieur à une limite déterminée, à savoir l'angle extérieur en a du triangle maa'. Donc *$a'm$ tend vers une limite* L'.

La géodésique L' présente évidemment avec L la relation indiquée en dernier lieu. Nous dirons qu'elle est *asymptote* à L. Nous voyons qu'à chaque type de lignes allant d'un point à une géodésique correspondent deux asymptotes de ce type; on peut considérer ces dernières comme les géodésiques qui, appartenant au type en question, joignent le point donné aux points à l'infini sur la géodésique donnée.

40. Réciproquement, si deux géodésiques L, L' sont asymptotes l'une à l'autre, c'est-à-dire si leur distance mutuelle comptée suivant un type déterminé (par exemple celui d'une certaine ligne joignant entre eux deux points a, a' pris sur ces géodésiques) tend vers zéro, *la ligne* L' *est l'asymptote à* L *menée par a' à l'aide de la méthode précédente.*

Soit, en effet, mm' une ligne joignant deux points pris respectivement sur L, L′ et dont la longueur λ tend vers zéro à mesure qu'elle s'éloigne indéfiniment (*fig.* 4). Les deux points m, m' sont supposés se déplacer d'une façon continue et la ligne mm' dériver par continuité de la ligne donnée aa'. Il en résulte que le quadrilatère $aa'mm'$ est réductible.

Joignons les deux points a', m par la géodésique qui, considérée comme ligne allant du point a' à la ligne mm', est du type $a'm'$. L'angle α des deux lignes $a'm'$, $a'm$ est infiniment petit, car (u et v désignant des coordonnées polaires géodésiques rapportées au point a, C^2 le coefficient de dv^2 dans l'élément linéaire relatif à ces coordonnées) on a

$$\lambda = \int_{mm'} \sqrt{du^2 + C^2 dv^2} > \int_{mm'} C\,dv > (\overline{a'm'} - \lambda)\,\alpha,$$

à cause de l'inégalité $C > u$, établie au n° **31**.

Donc $a'm'$ est bien la limite de $a'm$; ce qui démontre la conclusion, car la réductibilité du quadrilatère $aa'mm'$ et celle du triangle $a'mm'$ entraînent celle du triangle $a'am$.

Corollaires. — *Si une géodésique* L′ *est asymptote à une géodésique* L, *réciproquement celle-ci est asymptote à la première suivant le même type.*

Deux géodésiques asymptotes à une même troisième sont asymptotes entre elles.

41. Au contraire, *les asymptotes menées par un même point à deux géodésiques non asymptotes l'une à l'autre ne peuvent coïncider.*

Toutefois, cette dernière proposition n'est exacte que moyennant une convention spéciale.

Lorsque nous comparerons entre elles les géodésiques issues d'un même point a, nous aurons dorénavant égard à leurs éléments en a, et nous dirons qu'il y a deux géodésiques distinctes s'il y a deux éléments distincts; de sorte qu'une seule et même géodésique pourra figurer à double titre dans l'énumération des géodésiques issues de a, si elle a un point double en a.

Deux points a, a' étant joints par une ligne déterminée, les asymptotes menées par a, suivant le type aa', à deux géodésiques distinctes issues de a ne peuvent coïncider.

42. Deux asymptotes menées d'un même point a à une même géodésique L, mais différant par le type, peuvent-elles coïncider?

Supposons qu'une ligne ax soit asymptote à la géodésique L′ de deux manières différentes et soient mm', mm'' deux lignes de types différents joignant le point m de ax à L′, variant d'une manière continue et tendant vers zéro à mesure que le point m s'éloigne indéfiniment. La ligne $m'mm''$, jointe à l'arc $m'm''$ de L′, forme un contour fermé d'espèce invariable $\mathfrak{S}$, puisque ce contour se déforme continûment.

De considérations développées un peu plus loin (nos **33**, **34**) et qui ne supposent en rien les présentes (¹), il résulte que L′ est asymptote à la géodésique fermée L'_0 d'espèce $\mathfrak{S}$.

Réciproquement, dans ce cas, il y a effectivement coïncidence, car les asymptotes de L′ sont les mêmes que celles de L'_0, lesquelles ne changent pas quand on multiplie les types par le symbole de l'espèce $\mathfrak{S}$.

Si la ligne L′ *est elle-même la géodésique fermée d'espèce* $\mathfrak{S}$, *une même asymptote ne peut provenir de deux types différents*, puisqu'ici deux types différant entre eux par le symbole L′ doivent être regardés comme identiques.

43. Nous avons étudié au Chapitre précédent les géodésiques fermées. Les considérations actuelles nous conduisent à envisager les géodésiques asymptotiques aux géodésiques fermées. On voit qu'une telle géodésique L sera déterminée lorsqu'on aura donné :

1° L'espèce de la géodésique fermée correspondante L_0;

2° Un point a de L;

3° Un type de lignes allant du point a à L_0.

Nous réunirons dans une même catégorie les géodésiques fermées et leurs asymptotes. Les premières peuvent évidemment, en effet, être regardées comme un cas particulier des secondes.

(¹) Toutefois il est supposé en cet endroit, et par conséquent ici, que L′ ne soit pas d'une portion finie de la surface.

Cette réunion est d'ailleurs imposée par les corollaires du n° **40**, lesquels nous conduisent à ranger dans une même classe les géodésiques asymptotes entre elles.

44. L étant de nouveau une géodésique quelconque, reprenons le triangle $aa'm$ (*fig.* 4) considéré au n° **39**. aa' désignant, pour fixer les idées, une géodésique normale à L, soient λ la longueur aa', l l'arc am (ou, si L est fermée, celui des arcs am qui correspond à une position actuellement considérée de la géodésique variable am).

Donnant d'abord à l une valeur déterminée am_0, nous aurons

$$\widehat{am_0a} < \frac{\lambda}{l}.$$

Supposons que, dans toute l'étendue du triangle ama', la courbure soit inférieure en valeur absolue à une limite déterminée, ce qui aura lieu nécessairement si ce triangle est dans une partie finie de la surface. Si alors u, v désignent, comme au n° **34**, des coordonnées géodésiques rapportées à L, la quantité C sera, en vertu de l'équation (13), inférieure à $\frac{1}{2}(e^{k\lambda}+e^{-k\lambda})$. Ceci fournit une limite supérieure de l'aire du triangle et, par suite, de sa courbure, laquelle est plus petite que

$$\frac{k}{2}(e^{k\lambda}+e^{-k\lambda})\,l\lambda;$$

il en sera encore de même pour la courbure du triangle géodésique $aa'm_1$ où m_1 est un point de l'arc am. D'autre part, si m_1 est situé au delà de m_0, il suffira, pour obtenir la courbure du triangle $aa'm_1$, d'ajouter à la courbure du triangle $aa'm_0$ celle du triangle $a'm_0m_1$, laquelle est inférieure à l'angle $\widehat{am_0a'}$.

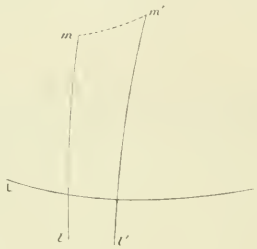
Donc *la courbure du triangle $aa'm_1$ est inférieure à une quantité fixe que l'on peut assigner dès que l'on connaît λ, sans connaître la position du point a ni celle de la géodésique* L (pourvu que le premier soit dans une région finie de la surface) *et qui tend vers zéro avec λ.*

Il en est de même, par conséquent, pour la différence entre l'angle $\widehat{a'ay}$ (*fig.* 4) et l'angle que fait l'asymptote L' avec aa' : car cette différence est la limite de la courbure qui vient d'être étudiée.

45. A ce résultat nous en rattacherons un autre qui nous sera utile plus loin.

Soient m, m' deux points très voisins l'un de l'autre (*fig.* 5). De ces deux points, abaissons sur une géodésique quelconque L des géo-

Fig. 5.



désiques normales l, l' qui dérivent l'une de l'autre lorsqu'on va de m en m' par le chemin très petit qui joint ces deux points.

On peut assigner à l'angle que font entre elles les tangentes menées à l, l' respectivement aux points m, m' une limite supérieure dépendante de la distance mm' et tendant vers zéro avec cette distance, mais indépendante du choix de la géodésique L et des points m, m', pourvu qu'on sache que ceux-ci sont dans une région finie et déterminée de la surface.

En effet, la différence des angles que font respectivement l, l' avec la géodésique très petite mm' est plus petite que la limite supérieure trouvée au numéro précédent.

V. — Géodésiques qui s'éloignent à l'infini.

46. Nous savons qu'à chaque nappe infinie $\mathfrak{N}_i$ correspond un contour simple, et par conséquent (si cette nappe est évasée, ce que nous supposerons) une géodésique fermée γ_i.

C'est cette ligne que nous prendrons désormais pour position initiale de la courbe C_i dont il a été question en commençant (n° **8**), position initiale qui limite la nappe $\mathfrak{N}_i$.

Ainsi qu'il a été remarqué (**27**), il n'existe sur $\mathfrak{N}_i$ qu'un seul type de lignes allant d'un point quelconque m à la courbe limite γ_i, de sorte que *la distance géodésique u du point m à cette courbe est une fonction parfaitement déterminée et univoque de la position de ce point.*

Comme cette distance ne peut avoir de maximum sur une géodésique et doit croître constamment et indéfiniment si elle est croissante à un moment quelconque, *une géodésique qui a pénétré dans la nappe $\mathfrak{N}_i$ ne peut plus en ressortir : elle s'éloigne forcément à l'infini sur cette nappe*, et cela régulièrement (c'est-à-dire sans alternatives de retour à distance finie).

47. De ce qui précède résulte que, si une géodésique s'éloigne à l'infini, il en est de même de toute géodésique infiniment voisine de la première.

48. Soit une géodésique issue d'un point O, non situé sur la nappe $\mathfrak{N}_i$, et qui pénètre dans cette nappe en coupant γ_i en un point m. Lorsque ce point se déplace continûment en décrivant γ_i dans un sens ou dans l'autre, la géodésique Om tourne autour du point O sans cesser de s'éloigner à l'infini sur la nappe $\mathfrak{N}_i$.

En supposant que le point m se meuve indéfiniment dans un sens, puis dans le sens opposé, on voit que Om occupera successivement toutes les positions comprises dans l'angle $\mathfrak{A}$ que font entre elles les deux asymptotes menées par le point O à γ_i et du type de Om.

Les angles $\mathfrak{A}$ vont jouer un rôle fondamental dans les considérations qui seront présentées un peu plus loin. Ils sont en nombre infini autour

d'un même point, si l'ordre de connexion de la surface est supérieur à 2.

Deux propriétés de ces angles nous seront principalement utiles :

1° *Les côtés d'un angle λ sont des géodésiques qui restent à distance finie* (ce sont des asymptotes à une courbe γ_i);

2° *Deux angles λ différents ne peuvent avoir un côté commun* (**41**, **42**).

49. Supposons que toutes les nappes infinies soient évasées : alors à chacune d'elles correspondra une géodésique fermée γ. Ces n lignes n'ont évidemment, d'après ce qui précède, aucun point commun. Elles divisent la surface en n nappes infinies et une partie S limitée en tous sens. C'est cette dernière que nous nommerons, dans ce qui va suivre, la *partie finie* de la surface : en sorte que cette locution aura pour nous dorénavant un sens parfaitement précis.

Nous voyons que, *si une géodésique quelconque ne s'éloigne pas à l'infini régulièrement sur une nappe déterminée, elle reste constamment comprise dans la partie finie de la surface.*

50. Nous dirons quelques mots du cas où les nappes infinies ne sont pas toutes évasées. Dans ce cas, les conclusions précédentes ne subsistent plus.

Soient, en effet, $\mathfrak{N}_i$ une nappe non évasée, $\mathfrak{S}_i$ l'espèce de contours simples correspondante.

Il n'existe pas de géodésique fermée de cette espèce $\mathfrak{S}_i$; car, s'il y en avait une et qu'on rapportât les points de $\mathfrak{N}_i$ aux coordonnées u, v relatives à cette géodésique, la quantité C augmenterait indéfiniment avec u, et il en serait, par conséquent, de même de l'intégrale

$$\int \sqrt{du^2 = C^2 dv^2}$$

étendue à une courbe indéfiniment éloignée d'espèce $\mathfrak{S}_i$.

Le même fait résulte, d'ailleurs, du théorème de Gauss appliqué à l'aire comprise entre la géodésique supposée et une courbe indéfiniment éloignée d'espèce $\mathfrak{S}_i$, si l'on part, conformément à ce qui a été

dit au n° **15**, de ce que l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ étendue à cette dernière courbe est infiniment petite.

Cette dernière démonstration a l'avantage de mettre clairement en évidence ce fait que *la géodésique fermée située sur la nappe non évasée doit être considérée comme rejetée à l'infini.*

31. On voit aussi (ce qui était à peu près évident d'après les remarques faites au n° **15**) que l'on peut faire varier la courbe C considérée en cet endroit de manière que son périmètre aille constamment en décroissant. Autrement dit, $(\mathcal{C})$ étant une position quelconque de cette courbe, il existe au delà de $(\mathcal{C})$ des courbes de même espèce et de périmètre plus petit que celui de toute autre courbe analogue située en deçà de $(\mathcal{C})$. Dans le cas contraire, en effet, les raisonnements du n° **57** continueraient à s'appliquer et montreraient l'existence d'une géodésique fermée d'espèce $(\mathcal{C})$.

On en conclut que, si $\mathcal{C}'$ est un contour quelconque distinct de $\mathcal{C}$, la géodésique fermée d'espèce $\mathcal{C}^n\mathcal{C}'$ (laquelle a forcément des parties à distance finie) s'éloigne autant qu'on veut sur la nappe non évasée si l'on prend le nombre n assez grand.

En un mot, la distinction que nous avons pu faire, en général, entre les nappes infinies et la partie finie de la surface cesse d'être possible dans ce cas spécial.

Nous nous bornerons à ces indications sur les nappes non évasées, et, dans tout ce qui va suivre, nous exclurons expressément leur existence.

32. Les considérations qui précèdent permettent d'étudier la distribution des géodésiques lorsque la surface est à connexion simple ou double.

Si, en effet, l'ordre de connexion est égal à 1, il ne peut y avoir de géodésique fermée, et la distance d'un point M à un point fixe quelconque O (distance qui est une fonction parfaitement déterminée de la position de M) augmente indéfiniment lorsque M décrit une géodésique. Toutes les géodésiques s'en vont, par conséquent, à l'infini, et *la distribution est entièrement analogue à celle des droites d'un*

plan ([1]). C'est un résultat qu'on peut vérifier aisément sur le paraboloïde hyperbolique.

Supposons, maintenant, que l'ordre de connexion soit égal à 2. Alors il n'y aura qu'un contour élémentaire, le contour simple correspondant à l'une quelconque des nappes infinies : la géodésique fermée correspondante divise la surface en deux nappes infinies. La partie finie de la surface n'existe pas. Donc toutes les géodésiques s'éloignent à l'infini, sauf celles qui sont asymptotes à la géodésique fermée : ces dernières passent, au nombre de 2, par chaque point de la surface.

C'est en particulier ce qui se passe sur l'hyperboloïde à une nappe, et notre résultat est conforme à celui qu'obtient Halphen sur la surface gauche de révolution.

On remarquera que la nature du résultat obtenu tient : 1° à ce qu'il n'y a qu'une seule espèce de contours fermés essentiellement distincts; 2° en particulier, à ce que les contours simples correspondant aux deux nappes infinies sont équivalents.

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse 2 :

1° Les contours fermés essentiellement distincts sont en nombre *infini;*

2° Les contours simples relatifs aux différentes nappes infinies sont tous distincts les uns des autres.

Grâce à cette double circonstance, les résultats obtenus en général vont être fort différents de ceux qui s'offrent dans les deux cas particuliers que nous venons d'examiner.

VI. — Géodésiques de troisième catégorie; classification générale.

35. Ainsi que nous l'avons dit au n° **31**, nous supposerons que les nappes infinies sont toutes évasées.

Nous avons, dans les Chapitres précédents, considéré deux classes de géodésiques : celles qui sont fermées ou asymptotiques aux géodésiques fermées, et celles qui s'éloignent indéfiniment. Nous allons maintenant étudier les géodésiques qui ne rentrent dans aucune des deux catégories précédentes.

([1]) Plus exactement, d'un plan non euclidien.

Envisageons une géodésique L, définie par un élément initial (soit un point O et la tangente en ce point). Si cette géodésique ne s'éloigne pas à l'infini, elle reste constamment comprise dans la partie finie de la surface. Dès lors on peut évidemment trouver sur cette ligne, d'une infinité de façons, deux éléments infiniment voisins, autrement dit deux points m, m', tels que :

1° L'arc mm' compris entre ces deux points, sur la ligne L, soit supérieur à une longueur déterminée quelconque λ;

2° La plus courte ligne géodésique l qui joint ces deux points soit inférieure à une quantité quelconque donnée ε;

3° L'angle des deux tangentes en m, m' soit également inférieur à ε.

La ligne l forme, avec l'arc mm' de L, un contour fermé ϖ, lequel n'est pas réductible à un point, puisque c'est un biangle géodésique. Soit L_0 la géodésique fermée d'espèce ϖ.

Considérons la distance normale u d'un point quelconque de L à la ligne L_0, distance comptée suivant un type tel qu'elle revienne à sa valeur primitive lorsque ce point décrit le contour ϖ (**28**). La différence des deux valeurs de u au point m et au point m' est très petite, et il en est de même (**45**) de la différence des deux valeurs de $\frac{du}{ds}$.

Je dis que u et $\frac{du}{ds}$ sont très petits en valeur absolue tout le long de l'arc mm'.

Pour le démontrer, supposons d'abord que u change de signe sur l'arc mm' de L et, par conséquent, aussi sur la ligne l : u sera très petit en m et en m', donc aussi tout le long de l'arc mm'. D'ailleurs, $\frac{d^2u}{ds^2}$ étant fini, $\frac{du}{ds}$ sera également très petit, en vertu d'un lemme démontré dans le Mémoire précédemment cité [1].

Supposons, en second lieu, que u garde un signe invariable sur le contour; alors il en sera de même de $\frac{d^2u}{ds^2}$; comme la différence des valeurs de $\frac{du}{ds}$ en m et en m' est très petite, $\frac{d^2u}{ds^2}$ devra être très petit en valeur absolue (sauf tout au plus pour des arcs de longueur totale très

[1] *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique*, n° 4, p. 334.

petite). D'ailleurs, $\frac{du}{ds}$ est aussi très petit, car u varie toujours dans le même sens; ce fait résulte de ce que la variation de u est très petite et, si u a un minimum, de ce que les deux valeurs initiale et finale de $\frac{du}{ds}$, lesquelles sont très peu différentes, comprennent entre elles zéro.

Dès lors, l'équation de L, rapportée à la géodésique L_0,

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}\left[1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right],$$

montre que $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}$ doit être très petit. L'équation

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -CK \tag{13}$$

prouve aisément qu'il doit en être de même de u, si la courbure (prise en valeur absolue) ne descend jamais au-dessous d'une limite déterminée, ou du moins ne devient très petite que dans des aires suffisamment petites dans toutes leurs dimensions et séparées par des intervalles non très petits.

Notre conclusion est donc démontrée dans tous les cas.

54. Si u continue à décroître en valeur absolue, notre géodésique est asymptote à L_0; sinon, nous devons supposer que u a un certain minimum, après lequel L s'éloigne à nouveau de L_0.

D'après cela, si, outre les deux catégories de géodésiques rencontrées dans les Chapitres précédents, il en existe une troisième, chacune des lignes de cette dernière catégorie correspondra à une série infinie de géodésiques fermées $L_0, L_1, \ldots, L_i$, de chacune desquelles elle s'approchera successivement pour l'abandonner ensuite; elle serrera ces géodésiques successives de plus en plus près, et cela sur des longueurs de plus en plus considérables.

En un mot, la géodésique en question possède la propriété indiquée par M. Poincaré [1], à savoir que les équations du problème admet-

[1] *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.

tent « une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence des deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut ».

53. La suite des géodésiques L_i suffit-elle à définir la géodésique L?

Pour nous en rendre compte, considérons, sur L, un point m séparé du point O par un arc très grand et, d'autre part, très voisin d'un point m' d'une des géodésiques L_i, de manière que les tangentes menées en ces deux points aux deux lignes fassent un angle très petit. Joignons Om' par la géodésique qui équivaut à l'arc Om joint à la ligne infiniment petite mm'. Cette géodésique fera avec L un angle très petit, comme on le démontre par le raisonnement déjà invoqué au n° **40**. Elle fera aussi un angle très petit avec L_i et, par suite, aussi avec l'asymptote menée du point O à cette ligne, suivant le même type; car la différence des angles que font Om, Om' avec mm' est sensiblement égale à la courbure totale du triangle Omm', laquelle est très petite (**44**), et, d'autre part, les angles de L et de L_i avec mm' sont aussi très peu différents.

Donc L *est la limite d'asymptotes menées du point* O *aux lignes* L_i.

On voit, par conséquent, que, s'il existe une géodésique de la troisième catégorie, on devra, pour l'obtenir, considérer :

1° Une série de géodésiques fermées L_i correspondant à des espèces de plus en plus compliquées;

2° Un point O;

3° Une série de types $\mathfrak{T}_i$ de chemins allant respectivement du point O à chacune des lignes L_i.

Les asymptotes menées du point O à chacune des lignes L_i, suivant le type $\mathfrak{T}_i$ correspondant, tendront (du moins si les L_i, $\mathfrak{T}_i$ ont été choisis convenablement) vers une position limite qui sera la géodésique demandée L.

On remarquera que toute géodésique asymptote à L sera définie par la même suite de symboles L_i, $\mathfrak{T}_i$, le point O changeant seul; de sorte que cette suite de symboles, lorsque le point O reste indéterminé, définit une *classe* de géodésiques, en prenant ce mot avec le sens qui lui a été donné au n° **45**.

56. Il reste à savoir si les trajectoires dont nous venons de supposer l'existence se présentent véritablement.

La réponse à cette question est affirmative; nous allons constater, en effet, que les géodésiques fermées et leurs asymptotes ne peuvent constituer à elles seules la totalité des géodésiques qui restent à distance finie.

Soit O un point que nous supposerons, pour fixer les idées, situé dans la partie finie de la surface; nous désignerons par E l'ensemble formé par les directions initiales des lignes géodésiques qui en partent [1] et ne s'éloignent pas indéfiniment.

D'après ce que nous avons vu précédemment, cet ensemble est formé par les lignes qui ne sont intérieures à aucun des angles que nous avons désignés (**48**) par la lettre $\mathcal{A}$, les côtés de ces angles faisant partie de l'ensemble.

Je dis qu'un tel ensemble est *parfait :*

1° *Toute ligne qui appartient à l'ensemble* E *appartient aussi à son dérivé.*

En effet, si une géodésique L appartenant à l'ensemble E sert de côté à un angle tel que toutes les directions intérieures à cet angle soient celles de géodésiques qui s'éloignent indéfiniment, cet angle ne peut être qu'un angle $\mathcal{A}$. Mais alors, de l'autre côté de L se trouveront des lignes appartenant à l'ensemble E : le contraire exigerait, en effet, que L serve de côté commun à deux angles $\mathcal{A}$ différents, ce qui ne peut être (**48**).

2° *Toute ligne qui n'appartient pas à l'ensemble* E *n'appartient pas à son ensemble dérivé.*

C'est ce que nous avons remarqué au n° **47**.

Donc l'ensemble E est bien parfait et, comme tel, *de seconde puissance.*

Or les asymptotes menées par le point O aux différentes géodésiques fermées forment un ensemble numérable.

Donc l'existence des géodésiques de la troisième catégorie est démontrée.

---

[1] Il est clair que nous adoptons ici la convention du n° **41**.

57. La génération de l'ensemble E rappelle évidemment celle de ces ensembles rencontrés par M. Poincaré, introduits plus explicitement dans la Science par M. Bendixson, puis étudiés par M. Cantor et qui, tout en étant parfaits, ne sont *condensés* dans aucun intervalle. Les angles $\mathfrak{A}$ jouent ici le rôle des intervalles nommés (a_ν, b_ν) par M. Cantor [1].

Nous allons montrer que l'ensemble E appartient effectivement à la catégorie dont nous venons de parler.

Pour cela, soit P un second point quelconque de la surface et désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des directions initiales des différentes géodésiques qui vont du point O au point P.

Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}$ a pour dérivé E.

Tout d'abord, une géodésique L, issue du point O et qui s'éloigne à l'infini sur une nappe quelconque $\mathfrak{N}_i$, n'appartient pas au dérivé de $\mathcal{E}$. Prenons, en effet, sur cette ligne un arc déterminé $Om = l$: une géodésique suffisamment voisine de L, mais non coïncidente avec elle, ne passera, assurément pas, par le point P, de manière que l'arc OP soit inférieur à l. Mais le point P ne peut pas non plus être l'extrémité d'un arc supérieur à l, porté sur une géodésique voisine de L, si l'arc l a été pris assez grand pour que son extrémité m soit sur la nappe $\mathfrak{N}_i$ et (dans le cas où le point P serait également sur cette nappe) à une distance de γ_i plus grande que celle de P.

Nous avons maintenant à démontrer la conclusion réciproque, à savoir que si la géodésique L est tout entière à distance finie, il existe des géodésiques faisant avec elle, en O, un angle aussi petit qu'on veut et passant par le point P.

Supposons d'abord que L soit asymptote à une géodésique fermée $\mathfrak{L}$, d'espèce $\mathfrak{s}$ (ce cas comprenant celui où L serait elle-même une géodésique fermée). L est la limite de géodésiques joignant O à un point déterminé quelconque m de $\mathfrak{L}$ et dérivant de l'une d'entre elles par un nombre de plus en plus grand de circulations du point m suivant $\mathfrak{L}$: soit $L^{(k)}$ la géodésique Om correspondant à k circulations et dont la longueur λ_k augmente indéfiniment avec k. Imaginons que le point m se rende en P par un chemin déterminé une fois pour toutes et de lon-

[1] *Acta mathem.*, t. IV, p. 381; 1884.

gueur l : la géodésique OP qui, dans ce déplacement, dérive par continuité de $L^{(k)}$, fait avec celle-ci (**40**) un angle inférieur à $\frac{l}{\lambda_k - l}$. Elle est donc infiniment voisine de $L^{(k)}$ et, par suite, de L pour k infini.

La conclusion demandée est ainsi établie si L est fermée ou asymptote à une géodésique fermée. Dès lors, elle s'étend d'elle-même aux géodésiques de troisième catégorie, puisque celles-ci sont des limites de lignes telles que la ligne L qui vient d'être considérée.

Le théorème est donc complètement démontré.

38. Les considérations précédentes nous permettent de prouver, comme nous l'avons annoncé, que l'ensemble E, quoique parfait, n'est condensé dans aucun intervalle : c'est-à-dire que, près de toute ligne appartenant à cet ensemble, se trouvent une infinité de lignes qui n'y appartiennent point.

Il suffit en effet, dans le raisonnement précédent, de prendre le point P sur une nappe infinie, puisque toutes les géodésiques qui passent par un tel point s'éloignent indéfiniment.

Il est donc bien prouvé que *l'ensemble* E *est un ensemble parfait, qui n'est nulle part continu.*

Mais de ce que nous venons de dire se dégagent des conclusions plus étendues à certains égards. Nous voyons, en effet :

1° *Que, dans le voisinage d'une ligne* L *faisant partie de l'ensemble* E, *on trouve des géodésiques allant à l'infini sur telle nappe infinie qu'on veut*, puisque le point P peut être pris sur n'importe quelle nappe infinie;

2° Que, dans le voisinage de cette même ligne, existent aussi d'autres lignes restant à distance finie, en particulier *des asymptotes à toutes les géodésiques* γ_i, puisque ces asymptotes servent de côtés aux angles α_i, *et des géodésiques de troisième catégorie :* celles-ci sont, en effet, distribuées dans tout angle contenant des éléments de E, puisque les asymptotes aux géodésiques fermées ne forment qu'une partie numérable de l'ensemble parfait E.

En un mot, tandis que toute géodésique qui s'éloigne à l'infini est entouré d'un continuum de géodésiques jouissant de la même propriété, au contraire, *tout changement, si minime qu'il soit, apporté*

à la direction initiale d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe, la géodésique troublée pouvant affecter n'importe laquelle des formes énumérées précédemment.

---

39. Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront-elles dans d'autres problèmes de Mécanique? Se présenteront-elles, en particulier, dans l'étude des mouvements des corps célestes? C'est ce qu'on ne saurait affirmer. Il est probable, cependant, que les résultats obtenus dans ces cas difficiles seront analogues aux précédents, au moins par leur complexité.

S'il en était ainsi, il importe de remarquer que l'un des principaux problèmes de la Mécanique céleste, la question de la stabilité du système du monde, même sous son aspect théorique (c'est-à-dire réduite au mouvement de n points matériels s'attirant suivant la loi de Newton), cesserait d'avoir un sens.

Certes, lorsqu'un système se meut sous l'action de forces données et que les conditions initiales du mouvement ont des valeurs *données, au sens mathématique du mot,* le mouvement ultérieur et, par conséquent, la manière dont il se comporte, lorsque t augmente indéfiniment, sont par cela même connus. Mais, dans les problèmes astronomiques, il ne saurait en être ainsi : les constantes qui définissent le mouvement sont données *physiquement,* c'est-à-dire avec des erreurs dont l'amplitude se réduit à mesure que la puissance de nos moyens d'observation augmente, mais qu'il est impossible d'annuler.

Si l'on ne suit les trajectoires que pendant un temps déterminé, quelconque d'ailleurs, on peut imaginer que les erreurs sur les données initiales aient été rendues assez minimes pour ne pas altérer sensiblement la forme de ces trajectoires pendant le susdit intervalle de temps. Ce qui précède nous montre qu'il n'est en aucune façon légitime d'en tirer une conclusion analogue relativement à l'allure *finale* de ces mêmes courbes. Celle-ci peut fort bien dépendre (et dépend, en effet, dans les problèmes relativement simples auxquels est consacré le

présent Mémoire) de propriétés discontinues, *arithmétiques* des constantes d'intégration.

60. De quelle nature sont ces propriétés? Pour nous borner aux cas que nous avons traités, dans quelle voie doit-on chercher à compléter la discussion que nous avons donnée des géodésiques sur les surfaces à courbures opposées et à connexion multiple? La première question qui se pose à cet égard est la suivante :

Nous avons vu que les géodésiques issues d'un point quelconque O sont :

1° Les géodésiques fermées ou leurs asymptotiques, dont chacune est caractérisée par une espèce $\mathfrak{E}$ de contours fermés, un type $\mathfrak{T}$ de lignes joignant le point O à la géodésique fermée d'espèce $\mathfrak{E}$;

2° Les géodésiques qui vont à l'infini, distribuées dans les différents angles $\mathfrak{A}$: chacun de ces angles est caractérisé par une nappe infinie et un type de lignes menées de O à la géodésique fermée correspondant à cette nappe;

3° Les géodésiques de la troisième catégorie, qui sont des limites de celles que nous avons nommées en premier lieu.

Il y aurait lieu d'étudier l'*ordre circulaire* dans lequel ces lignes sont rangées autour de O.

Il est d'ailleurs clair qu'il suffit de trouver la distribution des géodésiques de la première sorte, car entre celles-là viendront évidemment se placer d'eux-mêmes les angles $\mathfrak{A}$ d'une part, les géodésiques de la troisième catégorie de l'autre.

61. L'étude de cet ordre circulaire est d'ailleurs simplifiée par cette circonstance que *cet ordre ne dépend pas de la position du point* O.

En effet, lorsque ce point se déplace, deux lignes de symboles différents ne peuvent coïncider et, par conséquent, leur ordre reste invariable.

Il résulte presque évidemment de ce fait que, si deux symboles correspondent à deux géodésiques infiniment voisines, issues d'un point O, ils donneront encore deux géodésiques infiniment voisines en un second point O′; et, effectivement, l'on peut démontrer directe-

ment que les asymptotes menées du point O' (suivant le type d'un chemin OO' déterminé) à deux géodésiques très voisines issues du point O, sont aussi très voisines l'une de l'autre.

Supposons maintenant que le point O revienne à sa position primitive après s'être déplacé le long d'un certain contour fermé non réductible. Notre ordre circulaire ne sera pas altéré par cette opération, qui consiste à multiplier tous les types τ envisagés tout à l'heure par celui du contour en question (considéré comme joignant le point O à lui-même).

Ainsi l'on devra trouver, entre les symboles énumérés en 1° (numéro précédent), *un ordre circulaire qui ne change pas lorsqu'on multiplie tous les types par un même facteur quelconque*. La détermination générale des ordres jouissant de cette propriété est, par conséquent, un problème dont la solution importerait à notre objet.

62. Quant à la méthode que nous avons employée, on peut la considérer comme une application de deux principes posés par M. Poincaré, dans ses études sur les équations différentielles.

En premier lieu, nos conclusions mettent en évidence, une fois de plus, le rôle fondamental que joue dans ces questions l'*Analysis situs*. Qu'il soit absurde d'étudier des courbes intégrales tracées dans un domaine déterminé sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine, c'est une vérité sur laquelle il peut sembler inutile d'insister longuement. Cette vérité est cependant restée insoupçonnée jusqu'aux travaux de M. Poincaré.

En second lieu, l'importance que ce géomètre a reconnue aux solutions périodiques, dans son *Traité de Mécanique céleste*, s'est manifestée également dans la question actuelle. Ici encore, elles se sont montrées « la seule brèche par laquelle nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable [1]. »

D'une façon plus précise, elles ont joué pour nous le rôle d'une sorte de système de coordonnées auquel nous avons rapporté toutes les autres géodésiques.

[1] *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.

Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions;

PAR M. H. LAURENT.

Dans le travail qui suit, je me propose de créer un algorithme pour exposer la théorie générale des substitutions; à la considération de la notion de produits et de puissances de substitutions, on peut joindre les notions de somme, de différence, et en général de fonctions de substitutions. Les substitutions deviennent ainsi de véritables quantités imaginaires dans le sens le plus large du mot; elles jouent dans le calcul le même rôle exactement que les clefs; ce sont des *clefs*. Les clefs imaginaires reçoivent ainsi une interprétation concrète; elles auront désormais une signification précise.

Le calcul des substitutions tel que je le présente n'est pas un pur objet de curiosité: on verra qu'il vient ajouter des ressources au calcul ordinaire et qu'il permet de découvrir de nouveaux groupes: entre autres résultats, il permet d'énoncer, sous une forme simple, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions soient échangeables.

Dans ce qui suit, je laisse de côté tout ce qui concerne la théorie des invariants, mon seul but étant de montrer l'utilité de la nouvelle théorie. Ceux qui voudront bien lire les pages qui suivent se convaincront que je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste; ainsi, pour ne parler que d'une application que j'ai laissée de côté, on pourrait faire une théorie des congruences de substitutions en ne considérant que les

substitutions linéaires à coefficients entiers en négligeant tous les multiples d'un entier donné. Cette théorie des congruences de substitutions linéaires viendrait compléter la théorie des substitutions d'indices dans les substitutions de lettres.

2. — Substitutions linéaires.

On appelle *substitution linéaire* l'opération qui consiste à remplacer des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions linéaires et homogènes

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

de ces mêmes variables; c'est encore, si l'on veut, un changement de variables exprimé par les formules

$$\begin{array}{l} x'_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

une pareille opération peut être représentée par une seule lettre s.

Soit donc s la substitution

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la substitution

$$x'_i = a(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sera représentée par as. Soit encore t la substitution

$$x'_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la substitution

$$x'_i = (a_{i1} + b_{i1})x_1 + \ldots + (a_{in} + b_{in})x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sera représentée par $s + t$.

Les symboles $as + bt + cu + \ldots$, dans lesquels $a, b, c, \ldots$ sont des nombres et $s, t, u, \ldots$ des substitutions linéaires, sont donc bien définis. Une fois pour toutes, le symbole τ_{ij} désignera le symbole de la substitution qui remplace x_i par x_j et les autres x par zéro : ce sera la substitution

$$x'_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad x'_i = x_j, \qquad \ldots, \qquad x'_n = 0;$$

alors le symbole $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ désignera la substitution

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On appelle *produit de deux substitutions* $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$, $\Sigma b_{ij}\tau_{ij}$ le résultat de l'élimination de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ entre

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$x'_i = b_{i1}x'_1 + b_{i2}x'_2 + \ldots + b_{in}x'_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce résultat est

$$x'_i = \Sigma b_{ik}a_{k1}x_1 + \Sigma b_{ik}a_{k2}x_2 + \ldots + \Sigma b_{ik}a_{kn}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et on le désigne par

$$\Sigma b_{ij}\tau_{ij}\Sigma a_{ij}\tau_{ij};$$

c'est la substitution linéaire

$$\Sigma(b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj})\tau_{ij},$$

résultat qu'il ne faut pas confondre avec

$$\Sigma a_{ij}\tau_{ij}\Sigma b_{ij}\tau_{ij} = \Sigma(a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj})\tau_{ij}.$$

Le résultat de la multiplication n'est donc pas, en général, indépendant de l'ordre des facteurs.

On voit que, pour multiplier deux expressions de la forme

$\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ *l'une par l'autre, il faut traiter les symboles* τ_{ij} *comme des quantités algébriques, en ayant soin de ne pas intervertir les facteurs et en ayant égard aux relations*

$$\tau_{ij}\tau_{kl} = \begin{cases} \tau_{il} \text{ si } k = j, \\ 0 \text{ si } k \gtrless j; \end{cases}$$

lorsque s et t désignent deux substitutions, on a

$$st = ts;$$

on dit que ces deux substitutions sont *échangeables*.

Si s désigne une substitution linéaire, $s \times s$ se désigne par s^2; le produit de s^2 par s se désigne par s^3, ...; s^0 désigne ce que l'on appelle la *substitution identique;* elle remplace x_i par x_i; elle n'altère pas les variables, elle est équivalente à $\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots + \tau_{nn}$; on la désigne par 1; ainsi

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots + \tau_{nn} = 1.$$

Il est facile de voir que

$$\Sigma a_{ij}\tau_{ij}(\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots) = (\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots)\Sigma a_{ij}\tau_{ij} = \Sigma a_{ij}\tau_{ij}$$

et que tout nombre a représente aussi une substitution échangeable avec toutes les autres, à savoir la substitution

$$x'_1 = ax_1, \qquad x'_2 = ax_2, \qquad \ldots, \qquad x'_n = ax_n.$$

Le symbole $f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ se trouve donc bien défini, ainsi que le symbole

$$f(s, t, u, \ldots) = \Sigma a_{ijk} s^i t^j u^k \ldots,$$

les $a, b, \ldots, a_{ij}$ désignant des nombres et $s, t, u, \ldots$ des symboles de substitution.

Nous appellerons *degré* d'une substitution le nombre des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur lesquelles elle opère.

Le *déterminant* d'une substitution $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ est le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Ordinairement il est supposé différent de zéro, afin que les équations qui lient les anciennes et les nouvelles variables soient résolubles par rapport aux anciennes comme par rapport aux nouvelles variables; mais nous n'exclurons pas de nos considérations les substitutions de déterminant nul; nous verrons même qu'elles jouent un rôle important dans notre théorie.

Les substitutions τ_{ij}, par exemple, sont des substitutions de déterminant nul.

Deux substitutions s et s^{-1} sont dites *inverses* l'une de l'autre quand on a

$$ss^{-1} = 1.$$

Nous allons voir que, si le déterminant de s n'est pas nul, la substitution inverse existe et qu'elle est bien déterminée.

Soit en effet

$$s = \Sigma a_{ij}\tau_{ij};$$

posons

$$s^{-1} = \Sigma b_{ij}\tau_{ij};$$

si l'on veut que $ss^{-1} = 1$ ou que

$$\Sigma a_{ij}\tau_{ij}\Sigma b_{ij}\tau_{ij} = 1$$

ou que

$$\Sigma(a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \ldots)\tau_{ij} = 1,$$

il faudra poser

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j, \\ 1 \text{ si } i = j; \end{cases}$$

si alors on fait $\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn} = \Delta$, on a

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ji}}.$$

On trouve ainsi que, si $ts = 1$, on a $st = 1$ et, par suite, le symbole s^{-1} est bien défini si Δ n'est pas nul.

Il est bon d'observer que, si s et t sont échangeables, s^2 et t^β le sont, car si

$$st = ts,$$

on a, en multipliant à droite par s,

$$sts = ts^2 \qquad \text{ou} \qquad s^2 t = ts^2,$$

puis, en multipliant encore à droite par s,

$$s^2 ts = ts^3 \qquad \text{ou} \qquad s^3 t = ts^3, \qquad \ldots.$$

t étant échangeable avec s^2, s^2 sera échangeable avec t^β. α et β ont été supposés positifs, mais je dis que l'on a aussi

$$st^{-1} = t^{-1}s.$$

En effet

$$tt^{-1} = 1;$$

donc

$$stt^{-1} = s = tst^{-1};$$

multipliant à gauche par t^{-1}, on a

$$t^{-1}s = st^{-1};$$

donc, si l'on fait $t^{-2} = t^{-1}t^{-1}, \ldots$, t^α et s^β sont échangeables, même si α et β sont des entiers quelconques. *Et deux fonctions entières d'une même substitution sont échangeables.*

2. — Équation caractéristique.

Considérons deux déterminants

$$A = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}, \qquad B = \Sigma \pm b_{11}b_{22}\ldots b_{nn};$$

soit

$$C = \Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{nn}$$

leur produit; on a

$$(1) \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Supposons les $c_{ij} = 0$; on peut satisfaire à ces équations : 1° *en prenant tous les a_{ij} nuls*, sans autre condition; les c_{ij} seront alors nuls.

2° En supposant $B = 0$, les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1} = 0, \\ c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

se réduiront à $n-1$ distinctes et détermineront les rapports $a_{i1} : a_{i2} : a_{i3} : \ldots$ qui seront les mêmes quel que soit i; *les mineurs du second degré de A seront nuls.*

3° En supposant $B = 0$ et les $\frac{\partial B}{\partial b_{ij}}$ nuls, les équations (2) se réduiront à $n-2$ distinctes; deux des $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ déterminent les autres et l'on a, par exemple,

$$a_{ih} = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2},$$

quel que soit i; donc, *les mineurs du troisième degré de A sont nuls*, et ainsi de suite; donc :

Si tous les éléments du produit de deux déterminants sont nuls, les mineurs de ces déterminants sont nuls, et si m et m' désignent les degrés des mineurs de A et B qui sont tous nuls, on a

$$m + m' \geq n.$$

Supposons maintenant que le produit st de deux substitutions s, t soit nul, comme le déterminant d'un produit de deux substitutions est égal au produit de leurs déterminants; il faut en conclure que le déterminant de l'une au moins des substitutions est nul; de plus, en vertu de ce qui précède, si m et m' désignent les degrés des mineurs des déterminants de s et t qui sont tous nuls, on aura

$$m + m' \geq n.$$

Ces théorèmes nous seront bientôt utiles.

Toute substitution linéaire $\Sigma a_{ij} z_{ij}$ de degré n satisfait à une équation de degré n que l'on appelle son équation caractéristique.

En effet, si

$$s = \Sigma a_{ij} \tau_{ij},$$

on aura

$$\tau_{11} s = a_{11} \tau_{11} + a_{12} \tau_{12} + \ldots + a_{1n} \tau_{1n},$$
$$\tau_{12} s = a_{21} \tau_{11} + a_{22} \tau_{12} + \ldots + a_{1n} \tau_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou

$$(a_{11} - s)\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + \ldots + a_{1n}\tau_{1n} = 0,$$
$$a_{21}\tau_{11} + (a_{22} - s)\tau_{12} + \ldots + a_{2n}\tau_{2n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

posant alors

$$F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

on aura, en multipliant les équations précédentes à gauche par $\frac{\partial F}{\partial a_{11}}$, $\frac{\partial F}{\partial a_{21}}$, ... et en ajoutant,

$$F(s)\tau_{11} = 0;$$

on aurait de même

$$F(s)\tau_{22} = 0, \qquad \ldots, \qquad F(s)\tau_{nn} = 0,$$

donc

$$F(s)\tau_{11} + (\tau_{22} + \ldots + \tau_{nn})F(s) = F(s) = 0.$$

Ainsi, $F(s) = 0$ est l'équation à laquelle satisfait la substitution. Si elle ne satisfait à aucune autre équation de degré inférieur ou égal à n, on dira qu'elle est *normale;* dans le cas contraire, elle sera *singulière.*

Il résulte de là que *toute fonction entière $f(s)$ de s se réduira à une fonction entière de degré $n - 1$ au plus.* Car on a identiquement

$$f(x) = F(x)Q + R(x),$$

Q désignant le quotient et R le reste de la division de f par F. Si l'on suppose $x = s$, on a

$$f(s) = R(s);$$

ce qui montre bien que $f(s)$ se réduit à une fonction $R(s)$ de degré $n-1$.

Toute fonction rationnelle de s, $\frac{\varphi(s)}{f(s)}$ se réduit à une fonction entière qui, d'après ce qu'on vient de voir, est de degré $n-1$ au plus.

Car, si l'on met de côté le cas où $f(x)=0$, quand $F(x)=0$, il existe des polynomes $\theta(x)$ et $\psi(x)$ tels que

$$f(x)\theta(x)+F(x)\psi(x)=1$$

ou

$$f(s)\theta(s)=1, \qquad \theta(s)=\frac{1}{f(s)},$$

donc

$$\frac{\varphi(s)}{f(s)}=\theta(s)\psi(s).$$

Si $f(x)$ et $F(x)$ s'annulent en même temps, $f(s)$ et $F(s)$ ont un diviseur commun et $f(s)$ a son déterminant nul. $\frac{\varphi(s)}{f(s)}$ n'a pas de sens si, ce que l'on peut supposer, cette fraction est irréductible.

Supposons maintenant s et t échangeables; si l'on a

$$ts=st,$$

on peut toujours déterminer t en fonction rationnelle de s ou exprimer s et t en fonction d'une même substitution.

En effet, soient $F(s)=0$, $G(t)=0$ les équations caractéristiques de s et de t. Posons

$$\gamma+\alpha s+\beta t=y,$$

α et β désignant deux nombres quelconques, on aura

$$F\left(\frac{y-\beta t-\gamma}{\alpha}\right)=0;$$

multiplions par $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ et abaissons les degrés des équations ainsi obtenues au-dessous de n, au moyen de la relation $G(t) = 0$, puis éliminons $t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ entre les n relations ainsi obtenues, la résultante sera, ou identiquement nulle, ou fonction de y de la forme $H(y) = 0$; dans ce dernier cas, t s'exprimera en fonction rationnelle de y, car on aura des équations en $t, t^2, \ldots$, qui pourront être résolues. Si la résultante ne contient pas y, c'est qu'il existera des polynomes en t, tels que

$$\lambda F\left(\frac{y - \beta t - \gamma}{\alpha}\right) + \mu G = 0,$$

quel que soit y ou

$$\lambda F\left(\frac{y - \beta t - \gamma}{\alpha}\right) = 0.$$

$F\left(\frac{y - \beta t - \gamma}{\alpha}\right)$ aura donc son déterminant nul, quels que soient β, γ, α, ce qui est absurde; donc t et, de même, s pourront s'exprimer en fonction d'une même substitution $\gamma + \alpha s + \beta t$.

Ainsi, *deux substitutions échangeables sont des fonctions entières, de degré $n - 1$ au plus, d'une même substitution.*

Soit y cette substitution et $\varpi(y)$ son équation caractéristique, on a, en supposant x quelconque,

$$\varpi(x) = (x - y_1)^{\alpha_1}(x - y_2)^{\alpha_2} \ldots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant des entiers et $\Sigma\alpha = n$. Soit $f(x)$ une fonction entière de x, on aura, en posant

$$\theta_i(x) = \frac{\varpi(x)}{(x - y_i)^{\alpha_i}},$$

$$f(x) = \Sigma\theta_i(x)\frac{f(y_i)}{\theta_i(y_i)} + \Sigma\theta_i(x)(x - y_i)\frac{d}{dy_i}\frac{f(y_i)}{\theta_i(y_i)} + \ldots + E\varpi.$$

E désignant un polynome entier, ou

$$f(y) = \Sigma\theta_i(y)\frac{f(y_i)}{\theta(y_i)} + \ldots + E\varpi(y),$$

et, comme $\varpi(y) = 0$,

$$f(y) = \Sigma \theta_i(y) \frac{f(y_i)}{\theta(y_i)} + \Sigma \theta_i(y)(y - y_i) \frac{d}{dy_i} \frac{f(y_i)}{\theta_i(y_i)} + \ldots$$

telle est la forme que pourront affecter les substitutions échangeables. Cette formule pourra servir à définir les fonctions e^y, $\sin y$, $\cos y$, ... en y remplaçant $f(y)$ par e^y, $\sin y$, $\cos y$, ..., et l'on peut constater que, si s et t sont échangeables,

$$e^{as+bt} = e^{as} e^{bt} = e^{bt} e^{as}.$$

a, b désignant deux nombres quelconques.

3. — Sur diverses formes que l'on peut donner aux substitutions linéaires.

Soient s et t deux substitutions, $F(s) = 0$, $G(t) = 0$ leurs équations caractéristiques que nous supposerons à racines inégales; si l'on pose

$$\xi_i = \frac{F(s)}{s - s_i} \frac{1}{F'(s_i)},$$

$$\eta_i = \frac{G(t)}{t - t_i} \frac{1}{G'(t_i)},$$

$s_1, s_2, \ldots$ désignant les racines de $F = 0$ et $t_1, t_2, \ldots$ celles de $G = 0$: nous aurons

$$f(s) = f(s_1)\xi_1 + f(s_2)\xi_2 + \ldots + f(s_n)\xi_n,$$
$$g(t) = g(s_1)\eta_1 + g(s_2)\eta_2 + \ldots + g(s_n)\eta_n,$$

et il est facile de voir que

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_i \xi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \gtrless j \\ \xi_i & \text{si } i = j \end{cases}, \\ \eta_i \eta_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \gtrless j \\ \eta_i & \text{si } i = j \end{cases}. \end{array} \right.$$

Je suppose que les $\eta_i \xi_j$ et $\xi_i \eta_j$ soient tous différents de zéro, il n'existera pas de relations de la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

a_{ij} désignant des nombres, car en multipliant à gauche par ξ_p, à droite par η_q, on aurait

$$a_{qp} \xi_p \eta_q = 0,$$

ou $a_{pq} = 0$. Tous les a_{pq} seraient nuls.

Soit alors $V = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ une substitution quelconque; on pourra poser

$$\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij} = \Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j;$$

si l'on remplace les ξ et les η par leurs valeurs en fonction de τ_{ij}, on aura n^2 équations linéaires qui donneront pour les a_{ij} des valeurs bien déterminées, sans quoi il existerait des relations de la forme $\Sigma A_{ij} \xi_i \eta_j = 0$, A_{ij} désignant des nombres.

Si l'on prend, par exemple,

$$(2) \qquad \begin{cases} s = \tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1}, \\ t = \varepsilon \tau_{11} + \varepsilon^2 \tau_{22} + \ldots + \varepsilon^n \tau_{nn}, \end{cases}$$

ε désignant $\cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}$ (s sera une substitution circulaire), on aura

$$\eta_i = \tau_{ii},$$

$$\xi_i = \frac{1}{n} [(\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots) + \varepsilon^{-i} (\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots) + \ldots],$$

et l'on n'a jamais $\xi_i \eta_j = 0$.

Il est donc démontré que, une substitution quelconque est fonction entière de deux autres, convenablement choisies, s et t.

Il est d'ailleurs facile de voir que les fonctions s et t, données par les

formules (2), satisfont aux relations

$$s^n = 1, \qquad t^n = 1, \qquad st = \varepsilon ts.$$

Il est d'ailleurs bien évident que les fonctions s et t en fonction desquelles on peut exprimer une substitution quelconque peuvent être choisies d'une infinité de manières.

4. — Fonction exponentielle.

Les fonctions entières d'une substitution s sont données par la formule

$$(1) \qquad f(s) = \Sigma \theta_i(s) \frac{f_i(s)}{\theta_i(s_i)} + \Sigma \theta_i(s)(s - s_i) \frac{d}{ds_i} \frac{f(s_i)}{\theta(s_i)} + \ldots$$

Je rappelle que $F(s) = 0$ est l'équation caractéristique de s, et que s_1, s_2, ... sont ses racines; enfin, si

$$F(s) = (s - s_1)^{\alpha_1}(s - s_2)^{\alpha_2} \ldots$$

On a

$$\theta_i(s) = \frac{F(s)}{(s - s_i)^{\alpha_i}}.$$

On peut prendre l'équation (1) comme définition du symbole $f(s)$ dans tous les cas où $f(s)$ n'est pas entière et rationnelle. La fonction e^{as} définie ainsi par l'équation

$$e^{as} = \Sigma \theta_i(s) \frac{e^{as_i}}{\theta_i(s_i)} + \Sigma \theta_i(s)(s - s_i) \frac{d}{ds_i} \frac{e^{as_i}}{\theta_i(s_i)} + \ldots$$

joue un rôle important dans la théorie des substitutions. Il est facile de voir que

$$e^{as} = 1 + \frac{as}{1} + \frac{a^2 s^2}{1.2} + \ldots,$$

$$e^{as} e^{bs} = e^{bs} e^{as} = e^{(a+b)s}.$$

pourvu que a et b soient des nombres, mais on n'a pas, en général,

$$e^s e^t = e^{s+t}.$$

5. — Généralisation.

Une *substitution*, ou un changement de variable quelconque peut être représenté par des formules telles que

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n);$$

nous désignerons souvent cette opération au moyen d'une seule lettre s; le degré de la substitution s sera le nombre n des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur lesquelles elle opère.

Le *déterminant* d'une substitution s représentée par les équations (1) est le déterminant

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

On le suppose ordinairement différent de zéro afin que les équations (1) puissent être résolues par rapport aux x et, s'il en est ainsi, on pourra déduire des formules (1) des équations telles que

$$x_i = f'_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

alors, la substitution

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est dite *inverse* de s; on la désigne par le symbole s^{-1}.

Pour qu'une substitution ait une inverse, il faut et il suffit que son déterminant ne soit pas identiquement nul.

Si l'on a plusieurs substitutions de même degré, telles que (1), (2), ...,

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

représentées par les symboles $s, t, u, \ldots$ et si $a, b, c, \ldots$ désignent des nombres indépendants des variables, nous désignerons par

$$as + bt + cu + \ldots$$

la substitution

$$y_i = a\, f_i(x_1, \ldots, x_n) + b\, \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous appellerons *produit* des deux substitutions s et t la substitution représentée par les équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{c} y_i = f_i\,[\varphi_1(x_1, \ldots, x_n),\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)], \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

et nous la désignerons par st; en général, on n'aura pas

$$st = ts.$$

Si cependant une pareille équation avait lieu, nous dirions que s et t sont *échangeables* ou *permutables*.

Nous poserons encore

$$s^2 = ss, \qquad s^3 = ss^2 = s^2 s. \qquad \ldots, \qquad s^\alpha = ss^{\alpha-1} = s^{\alpha-1} s \qquad \ldots.$$

Le symbole a, a désignant un nombre, représente, si l'on veut, une substitution, à savoir

$$y_1 = ax_1, \qquad y_2 = ax_2, \qquad \ldots,$$

en sorte que 1 que nous représenterons aussi par s^0 sera le symbole de la substitution $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ... qui n'altère pas les variables: $s^0 = 1$ est ce que l'on appelle la *substitution identique*. Il résulte de là que le symbole

$$a + bs + cs^2 + ds^3 + \ldots,$$

où s désigne une substitution et où $a, b, c, \ldots$ sont des nombres indépendants des variables, représente une substitution bien déterminée à

déterminant nul ou différent de zéro, et il est évident que *deux polynomes entiers en s sont deux substitutions échangeables quand s est linéaire.*

Le déterminant du produit de deux substitutions de même degré est égal au produit des déterminants de ces substitutions.

En effet, si l'on considère la substitution st, représentée par les équations (3), son discriminant est

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)} \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Le symbole s^{-1} ou $\frac{1}{s}$ ayant été défini, le symbole $\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$, dans lequel φ et ψ désignent des polynomes entiers en s à coefficients numériques, se trouve bien défini.

Toutes les substitutions, fonctions rationnelles d'une même substitution linéaire, sont échangeables.

Nous dirons que des substitutions en nombre fini ou infini, s, s', s'', ... *forment un groupe* si leurs produits effectués dans un ordre quelconque font partie de ces substitutions.

Toutes les fonctions rationnelles d'une même substitution linéaire forment donc un groupe de substitutions échangeables.

Un groupe est continu, quand il renferme une infinité de substitutions et que, $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ étant une de ses substitutions, il en existe une autre $y_i = f'_i(x_1, \ldots, x_n)$, les fonctions f_i et f'_i différant infiniment peu. Il est discontinu dans le cas contraire.

6. — Condition pour que des substitutions forment un groupe.

Considérons les substitutions à r paramètres $a_1, \ldots, a_r$

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

M. Sophus Lie a donné la condition pour qu'elles forment un groupe; on peut présenter son analyse comme il suit en la simplifiant : dire que (1) représente un groupe, c'est dire que si l'on pose

$$(2) \qquad z_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, b_1, \ldots, b_r),$$

on aura, comme conséquence de (1) et (2),

$$(3) \qquad z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_r),$$

les c étant fonctions des a et des b. Nous supposerons que le groupe contient la substitution identique $x_i = f_i(x_1, \ldots, a_1^0, \ldots, a_r^0)$. Les équations (2) et (3) donnent

$$f_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots, c_r) = f_i(f_1, \ldots, f_n, b_1, \ldots, b_r),$$

f_i, désignant, pour abréger, $f_i(x_1, x_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_r)$; différentions alors en laissant les x et les b constants, nous aurons

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial a_k} da_k = df_i,$$

puis, en laissant les x et les a constants,

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial b_1} = \frac{\partial f_i}{\partial b_1},$$
$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial b_2} = \frac{\partial f_i}{\partial b_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en éliminant les $\frac{\partial f_i}{\partial c_j}$, on a

$$\begin{vmatrix} df_i & \sum \frac{\partial c_1}{\partial a_k} da_k & \ldots & \sum \frac{\partial c_r}{\partial a_k} da_k \\ \frac{\partial f_i}{\partial b_1} & \frac{\partial c_1}{\partial b_1} & \ldots & \frac{\partial c_r}{\partial b_1} \\ \frac{\partial f_i}{\partial b_2} & \frac{\partial c_1}{\partial b_2} & \ldots & \frac{\partial c_r}{\partial b_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

Si l'on fait $b_1 = a_1^0$, $b_2 = a_2^0$, ..., $f_i(f_{11}, f_{21}, \ldots, b_1, b_2, \ldots)$ se réduit à y_i et les dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial b_j}$ à des fonctions Y_{ij} des y seuls; enfin, les dérivées des c se réduisent à des fonctions des a seuls, de sorte que l'équation précédente prend la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dy_i = Y_{i1} \Sigma A_{1k}\, da_k + \ldots + Y_{ir} \Sigma A_{rk}\, da_k, \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

les A_{ij} désignant des fonctions des a seuls, et les Y_{ij} des fonctions des y seuls.

Ainsi, *lorsque les équations* (1) *représentent un groupe possédant la substitution identique, les fonctions f_i ou y_i satisfont aux équations aux différentielles totales* (4) que M. Lie remplace par des équations aux dérivées partielles dont (4) est une forme condensée.

On peut démontrer que, réciproquement, si les équations (4) sont complètement intégrables, leurs solutions définissent, ordinairement, quand on les met sous la forme

$$(5) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un groupe à r paramètres; $x_1, x_2, \ldots$ sont alors les constantes d'intégration.

En effet, pour que les équations (4) soient intégrables, il faut que les suivantes soient complètement intégrables

$$\frac{\partial F}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F}{\partial y_1}(Y_{11} A_{1\mu} + Y_{12} A_{2\mu} + \ldots) + \frac{\partial F}{\partial y_2}(Y_{21} A_{1\mu} + \ldots +) \ldots = 0;$$

si l'on pose alors

$$Y_{1i} \frac{\partial F}{\partial y_1} + Y_{2i} \frac{\partial F}{\partial y_2} + \ldots + Y_{ni} \frac{\partial F}{\partial y_n} = Y_i F,$$

elles pourront s'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial a_\mu} + Y_1 F A_{1\mu} + Y_2 F A_{2\mu} + \ldots + Y_r F A_{r\mu} = 0.$$

et, si l'on résout par rapport aux YF,

$$(6) \qquad Y_i F + A_i F = 0,$$

en désignant par $A_i F$ une expression de la forme

$$A_i F = \alpha_{i1} \frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots + \alpha_{ir} \frac{\partial f}{\partial a_r};$$

où les α sont fonctions des a et ne dépendent pas des y; *cela suppose le déterminant* $\Sigma \pm A_{11} \ldots A_{rr}$ *différent de zéro :* c'est ce que nous supposerons. Pour que ces équations (6) soient complètement intégrables, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$[(A_i + Y_i)(A_j + Y_j) - (A_j + Y_j)(A_i + Y_i)] F = \Sigma c_{ij}^s (A_s + Y_s) F;$$

si l'on prend F indépendant des a, comme les AF ne contiennent pas les y, on aura

$$(7) \qquad (Y_i Y_j - Y_j Y_i) F = \Sigma c_{ij}^s Y_s,$$

et les c_{ij} seront indépendants des a. On voit qu'ils sont, pour une raison analogue, indépendants des y; ce sont donc des constantes, et l'on a aussi

$$(8) \qquad (A_i A_j - A_j A_i) F = \Sigma c_{ij}^s A_s.$$

(7) et (8) sont les conditions d'intégrabilité complète de (4) ou (6). *Supposons-les satisfaites.*

Revenons aux équations (4); supposons-les satisfaites, leurs intégrales se présenteront sous la forme

$$(9) \qquad F_i(y_1, y_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots) = \text{const.},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou, en appelant $x_1, x_2, \ldots$ les valeurs de $y_1, y_2, \ldots$ pour $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2, \ldots$,

$$(10) \qquad F_i(y_1, \ldots, a_1, \ldots) = F_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots),$$

et les fonctions F seront assujetties à satisfaire aux relations

$$A_j F_i + Y_j F_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r)$$

et à des relations analogues

$$C_j F_i + X_j F_i = 0.$$

Cela posé, si dans (10) on considère les y comme fonctions des c et des a, on aura

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial a_k} + \ldots = 0,$$

$$-\frac{\partial F_i}{\partial c_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial c_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial c_k} + \ldots = 0.$$

d'où l'on tire

$$A_j F_i + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} A_j y_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} A_j y_2 + \ldots = 0,$$

$$-C_j F_i + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} C_j y_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} C_j y_2 + \ldots = 0,$$

et en multipliant la première formule par $C_j F_i$, la seconde par $A_j F_i$, puis ajoutant

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(A_j y_1 C_j F_i - A_j F_i C_j y_1) + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}(A_j y_2 C_j F_i - \ldots) \ldots = 0:$$

on en conclut

$$A_j y_k C_j F_i - A_j F_i C_j y_k = 0,$$

ou

$$\frac{A_j y_1}{C_j y_1} = \frac{A_j y_2}{C_j y_2} = \ldots = \frac{A_j y_n}{C_j y_n};$$

si l'on désigne par $\frac{\alpha_j}{\gamma_j}$ ces rapports, d'où l'on peut supposer les y éliminés, on a

$$\gamma_j A_j y_\mu - \alpha_j C_j y_\mu = 0:$$

ce qui exige que les a et les c entrent dans les expressions des y sous

la forme de n fonctions $\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, en sorte que des équations (10) on tire

$$\begin{aligned} y_j &= f_i[x_1, x_2, \ldots, \varphi_1(a_1, \ldots, c_1, \ldots), \varphi_2, \ldots], \\ v_i &= f_i[y_1, y_2, \ldots, \varphi_1(b_1, \ldots, c_1, \ldots), \quad \ldots], \\ z_i &= f_i[x_1, x_2, \ldots, \varphi_1(a_1, \ldots, b_1, \ldots), \quad \ldots]; \end{aligned}$$

ce qui montre que les intégrales des équations ($\mathfrak{f}$), quand ces équations sont intégrables (et quand $\Sigma \pm A_{11}, \ldots, A_{rr}$ est différent de zéro), représentent un groupe.

7. — Étude particulière des substitutions à un paramètre.

Les substitutions à un paramètre sont remarquables, elles se conduisent par rapport au paramètre comme des exponentielles et peuvent être représentées, comme nous allons le voir, par des exponentielles.

Les équations différentielles d'un groupe à un paramètre se réduisent à des équations différentielles ordinaires, car les équations ($\mathfrak{f}$) du § 6 se réduisent à

$$(1) \qquad dy_i = Y_i A\, da \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les Y_i étant fonctions des y seuls et A désignant une fonction de a ; si l'on change de paramètre, en posant

$$A\, da = dt, \qquad t = \int A\, da,$$

les équations (1) s'écrivent

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt;$$

leurs intégrales se présentent sous la forme

$$\begin{aligned} F_i(y_1, \ldots, y_n) &= c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ F(y_1, \ldots, y_n) &= c + t, \end{aligned}$$

les c_i et c désignant des constantes, et en appelant $x_1, x_2, \ldots$ les valeurs de $y_1, \ldots, y_n$ pour $t = t'$, puis $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les valeurs de $y_1, y_2, \ldots y_n$ pour $t = t''$, on a

$$\begin{aligned}
&F_i(y_1, \ldots, y_n) = F_i(x_1, \ldots, x_n) = F_i(z_1, \ldots, z_n),\\
&F(y_1, \ldots, y_n) - F(x_1, \ldots, x_n) = t - t',\\
&F(y_1, \ldots, y_n) - F(z_1, \ldots, z_n) = t - t'',\\
&F(z_1, \ldots, z_n) - F(x_1, \ldots, x_n) = t'' - t'.
\end{aligned}$$

De ces équations on en tire d'autres de la forme

$$\begin{aligned}
y_i &= f_i(x_1, \ldots, x_n, t - t'),\\
z_i &= f_i(y_1, \ldots, y_n, t'' - t),\\
z_i &= f_i(x_1, \ldots, x_n, t'' - t'),
\end{aligned}$$

et, comme $t'' - t' = (t'' - t) + (t - t')$, on voit que :

1° Les intégrales des équations (1) définissent un groupe à un paramètre;

2° Que le paramètre dans un groupe à un paramètre peut être choisi de telle sorte que le produit de deux substitutions du groupe se fasse en ajoutant les valeurs correspondantes du paramètre;

3° Les substitutions d'un groupe à un paramètre sont donc échangeables.

Nous observerons encore qu'un groupe, dérivé d'équations différentielles de la forme

$$dy_i = Y_{i1}\, da_1 + \ldots + Y_{ir}\, da_r,$$

serait représenté par des équations de la forme

$$F_i(y_1, \ldots, y_n) = y_i(a_1, \ldots, a_r) + c_i,$$

c_i désignant une constante, et un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, montrerait que les substitutions représentées par ces équations sont échangeables.

Mais revenons aux substitutions à un paramètre a, soit $s(a)$ une pareille substitution, on peut poser

$$s(a)s(b) = s(a+b),$$

$$\frac{ds(a)}{da}s(b) = \frac{ds(a+b)}{da} = s(a)\frac{ds(b)}{db}.$$

Si alors on fait $b = 0$, on a en supposant $\frac{ds_i}{db} = k$,

$$\frac{ds_a}{s_a} = k\,da.$$

8. — Substitutions infinitésimales.

Une substitution infinitésimale est une substitution de la forme $1 + s\varepsilon$ où ε est infiniment petit, une pareille substitution remplace x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2, \ldots, x_n + \delta x_n$ et l'on peut supposer

$$\delta x_1 = X_1 \delta t, \qquad \ldots, \qquad \delta x_n = X_n \delta t,$$

$X_1, \ldots, X_n$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on désigne par s la substitution

$$y_i = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

la substitution infinitésimale considérée sera $1 + s\delta t$. Supposons $x_1, \ldots, x_n$ fonctions de t, $\delta x, \ldots, \delta t$ pourront être remplacées par $dx_1, \ldots, dt$ et $1 + s\,dt$ remplacera $x_1, \ldots, x_n$ par $X_1\,dt, \ldots, X_n\,dt$ en sorte que

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt;$$

les intégrales de ces équations seront de la forme

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, t) = F_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0),$$

x^0 désignant la valeur de x_i pour $t = t^0$; ces équations définissent,

comme on l'a vu, un groupe de substitutions S au paramètre t, dont la substitution infinitésimale $1 + s\,dt$ fait partie. On sait que, pour intégrer les équations (1), on peut former les quantités

$$\begin{aligned} x_i^1 - x_i^0 &= X_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)\,dt, \\ x_i^2 - x_i^1 &= X_i(x_1^1, \ldots, x_n^1)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et passer aux limites, ainsi que cela résulte de la théorie de Cauchy, ce qui revient à former la substitution $(1 + s\,dt)^m$, m désignant un nombre infini tel que $\frac{t - t^0}{m} = dt$, on a donc

$$S = \lim \left(1 + \frac{t - t^0}{m} s\right)^m :$$

cette limite existe en général et l'on a

$$S = 1 + \frac{t - t^0}{1} s + \frac{(t - t^0)^2}{1.2} s^2 + \ldots,$$

ce que l'on peut écrire symboliquement

$$S = e^{s\,t - t^0};$$

donc, *à toute substitution s correspond une exponentielle symbolique* $e^{s(t-t^0)}$ *qui représente un groupe à un paramètre t et l'on a*

$$\frac{dS}{dt} = sS = Ss;$$

la substitution infinitésimale de S *est* $1 + s\,dt$.

Soit maintenant $s(a_1, a_2, \ldots, a_r) = s_a$ une substitution à r paramètres $a_1, a_2, \ldots$, on aura

$$s(a_1, a_2, \ldots)\,s(b_1, b_2, \ldots) = s(c_1, c_2, \ldots),$$

ou, en se servant d'une notation abrégée,

$$s_a s_b = s_c.$$

$c_1, c_2, \ldots$ seront des fonctions de $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$. On aura

$$ds_a s_b = \sum \frac{ds_c}{dc_i} \frac{dc_i}{da_k} da_k,$$

$$s_a \frac{\partial s_b}{\partial b_k} = \sum \frac{\partial s_c}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial b_k}$$

et, en éliminant les $\frac{\partial s_c}{\partial c_i}$,

$$\begin{vmatrix} ds_a s_b & \sum \frac{\partial c_1}{\partial a_k} da_k & \ldots \\ s_a \frac{\partial s_b}{\partial b_1} & \frac{\partial c_1}{\partial b_1} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

puis, supposant $s_b = 1$, et, posant dans cette hypothèse $\frac{\partial s_i}{\partial b_j} = h_j$, on a

$$(1) \qquad ds_a = s_a(h_1 \Sigma A_{1k} da_k + \ldots + h_r \Sigma A_{rk} da_k).$$

Cette équation unique est, au fond, équivalente aux n équations (4) du § 7. Si elle est intégrable, s_a représentera un groupe. Supposons-la intégrable, on aura son intégrale par la méthode de Meyer en posant

$$(2) \qquad \Sigma A_{1k} da_k = \lambda_1 dt, \qquad \ldots, \qquad \Sigma A_{rk} da_k = \lambda_r dt,$$

et, en supposant $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ constants, les a seront fonctions de $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t, \ldots$; (1) deviendra alors

$$ds_a = s_a(h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \ldots + h_r\lambda_r)\, dt,$$

et s_a n'étant plus fonction que d'un seul paramètre t, on aura

$$s_a = e^{(h_1\lambda_1 + \ldots + h_r\lambda_r)(t - t_0)}$$

ou, en supposant $t_0 = 0$,

$$s_a = e^{(h_1\lambda_1 + \ldots + h_r\lambda_r)t};$$

finalement, en remplaçant $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t, \ldots$ par leurs valeurs, on aura s_a

sous la forme

$$e^{h_1\psi_1+\ldots+h_r\psi_r},$$

$\psi_1, \psi_2, \ldots$ étant fonctions de $a_1, a_2, \ldots$: en changeant de paramètres s'il le faut, on voit que *tout groupe à r paramètres pourra être représenté par une exponentielle de la forme*

$$e^{a_1h_1+\ldots+a_rh_r}.$$

Mais les h ne sont pas arbitraires et l'on n'aura pas, en général,

$$e^{\Sigma ah}e^{\Sigma bh} = e^{\Sigma(a+b)h}.$$

Lorsque l'on a ramené un groupe à la forme $e^{\Sigma ah}$, la quantité symbolique $1+\Sigma ah\varepsilon$ est une substitution infinitésimale: il y a donc r substitutions infinitésimales linéairement distinctes

$$1+h_1\varepsilon, \qquad 1+h_2\varepsilon, \qquad \ldots, \qquad 1+h_r\varepsilon.$$

9. — Étude des conditions d'intégrabilité.

Les intégrales des équations

$$(1) \qquad Y_iF + X_iF = 0$$

représentent un groupe S à r paramètres, quand on a

$$\left.\begin{aligned} &(2) \qquad (Y_iY_j - Y_jY_i)F = \Sigma c_{ij}^s Y_sF \\ &(3) \qquad (X_iX_j - X_jX_i)F = \Sigma c_{ij}^s X_sF \end{aligned}\right\} (i, j = 1, 2, \ldots, r),$$

et seulement dans ce cas. Je rappelle que

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &Y_iF = Y_{1i}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + Y_{ni}\frac{\partial F}{\partial y_n}, \qquad X_iF = \alpha_{1i}\frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots \\ &\qquad\qquad Y_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial b_j}\right), \end{aligned}\right.$$

la parenthèse indiquant que les valeurs des b sont celles qui donnent $S_b = 1$.

Enfin h_i est la valeur $\left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)$; c'est une substitution particulière qui ne dépend plus ni des a ni des b, et, comme S_b est représentée par les équations

$$z_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, b_1, \ldots, b_r),$$

$\left(\frac{\partial S}{\partial b_j}\right)$ sera représentée par

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial b_j}\right) = Y_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si, dans la formule (2), on fait $F = y_k$, on a

$$(Y_i Y_j - Y_j Y_i) y_k = \Sigma c_{ij}^s Y_s y_k,$$

ou bien, en vertu de (1),

$$Y_i Y_{kj} - Y_j Y_{ki} = \Sigma c_{ij}^s Y_{ks},$$

ou enfin

$$Y_{1i} \frac{\partial Y_{kj}}{\partial y_1} - Y_{1j} \frac{\partial Y_{ki}}{\partial y_1} + Y_{2i} \frac{\partial Y_{kj}}{\partial y_2} - \ldots = \Sigma c_{ij}^s Y_{ks};$$

c'est, sous une autre forme, la condition d'intégrabilité.

Si, dans la fonction $F(y_1, y_2, \ldots)$, on remplace $y_1, y_2, \ldots$ par $y_1 + \varepsilon Y_{i1}, y_2 + \varepsilon Y_{i2} \ldots$, on trouve, en supposant ε infiniment petit,

$$F(y_1, y_2, \ldots) + \varepsilon \left(Y_{i1} \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots \right) = F + \varepsilon Y_i F,$$

et, si l'on y remplace ensuite $y_1, y_2, \ldots$ par $y_1 + \varepsilon' Y_{j1}, y_2 + \varepsilon' Y_{j2}, \ldots$, on trouve

$$F + \varepsilon Y_i F + \varepsilon' Y_j F + \varepsilon\varepsilon' Y_j Y_i F.$$

C'est le résultat obtenu par la substitution $(1 + \varepsilon' h_j)(1 + \varepsilon h_i)$ ou $1 + \varepsilon h_i + \varepsilon' h_j + \varepsilon\varepsilon' h_j h_i$; donc, la substitution $h_j h_i$ change F en $Y_j Y_i F$. L'équation (2) exprime donc que

$$h_i h_j - h_j h_i = \Sigma c_{ij}^s h_s.$$

C'est le résultat auquel on parvient en exprimant directement les conditions d'intégrabilité de l'équation (1) du paragraphe précédent.

$h_1, h_2, \ldots$ sont ce que j'appellerai les substitutions *fondamentales* du groupe S_i.

Lorsque $n = r$, il est facile de trouver des fonctions α_{ij} telles que les équations (3) aient lieu; il suffit de prendre pour les $A_i F$ des fonctions obtenues en changeant, dans les Y_i, y_i en a_i. Si r est multiple de n, on désignera par $A_i, A'_i, A''_i, \ldots$ ce que deviennent les Y_i quand on change y_i en $a_i, a'_i, a''_i, \ldots$. Alors on a

$$\begin{aligned}&(A_i + A'_i + \ldots)(A_j + A'_j + \ldots) - (A_j + A'_j + \ldots)(A_i + A'_i \ldots)\\ &= A_i A_j - A_j A_i + A'_i A'_j - A'_j A'_i + \ldots = \Sigma c^s_{ij}(A_s + A'_s + \ldots),\end{aligned}$$

et le symbole $A_i + A'_i + \ldots$ jouira de la propriété exprimée par les équations (3).

Maintenant, si l'on observe qu'en changeant de variables on a

$$Y_i F = Y_i z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + Y_i z_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} + \cdots = Z_i F,$$

on aura

$$\begin{aligned}(Z_i Z_j - Z_j Z_i) F &= \sum \left(Y_i z_k \frac{\partial}{\partial z_k} Y_j z_l \frac{\partial F}{\partial z_l} - \cdots \right)\\ &= \sum \left(Y_i z_k \frac{\partial}{\partial z_k} Y_j z_l \frac{\partial F}{\partial z_l} - \cdots \right)\\ &= \sum c^s_{ij} \left(Y_s z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + \cdots \right) = \sum c^s_{ij} Z_s F.\end{aligned}$$

Pour que les z soient en nombre inférieur à n, il suffira de prendre pour quelques-uns d'entre eux des solutions de $Y_i F = 0$. On aura ainsi un symbole A à moins de n variables et, en l'ajoutant aux A, A', A'', ..., on aura un symbole à r variables et satisfaisant à l'équation (3). Donc

$$h_i h_j - h_j h_i = \Sigma c^s_{ij} h_s$$

est la seule condition nécessaire à l'existence du groupe $e^{\Sigma a h}$.

Considérons maintenant les équations aux différentielles partielles

$$A_i F + P_i F = 0,$$

dans lesquelles on suppose que P_i ne diffère de Λ_i que par le changement de $a_1, a_2, \ldots$ en $p_1, p_2, \ldots$; on aura

$$(P_i P_j - P_j P_i)F = \Sigma c_{ij}^s P_s F.$$

et ces équations détermineront un groupe dans lequel $a_1, \ldots, a_r$ seront les variables et $p_1, p_2, \ldots, p_r$ les paramètres, et, à cause de l'identité de forme des Λ et des P, il sera possible de former le groupe en se donnant les Λ_i satisfaisant aux relations (3). Ce groupe sera alors défini par les équations

$$\begin{aligned}
b_i &= \Phi_i(a_1, a_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots),\\
c_i &= \Phi_i(b_1, b_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots),\\
e_i &= \Phi_i(a_1, a_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots),\\
r_i &= \varphi_i(p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots),\\
e_i &= \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots),
\end{aligned}$$

c'est ce que l'on appelle un *groupe paramétrique*.

10. — Groupe adjoint.

Reprenons les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
y_i &= f_i(x_1, \ldots, a_1, \ldots),\\
z_i &= f_i(y_1, \ldots, b_1, \ldots),\\
z_i &= f_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots),
\end{aligned}\right\}\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $c_i = \varphi_i(a_1, \ldots, b_1, \ldots)$ et qui expriment que (1) représente un groupe; on a, comme plus haut,

$$f_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots) = f_i(y_1, y_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots),$$

et l'on en conclut

$$(2)\qquad dy_i = Y_{i1}\Sigma\Lambda_{1k}\,da_k + \ldots + Y_{ir}\Sigma\Lambda_{rk}\,da_k;$$

mais il est clair que l'on aurait pu obtenir des équations analogues en observant que

$$x_i = F_i(y_1, \ldots, a_1, \ldots), \quad x_i = F_i(x_1, \ldots, b, \ldots), \quad z_i = F_i(y_1, \ldots, c_1, \ldots);$$

on aurait trouvé

$$(3) \qquad dx_i = X_{i1} \Sigma A_{1k}\, da_k + \ldots + X_{ir} \Sigma A'_{rk}\, da_k,$$

et les X_{ij} auraient été les $\frac{\partial f_i}{\partial b_j}$ de la substitution identique, en sorte qu'ils ne diffèrent des Y_{ij} que par le changement de y en x. Mais, si l'on différentie les équations

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$$

en faisant varier les x et les a, on a

$$0 = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + \sum \frac{\partial f_i}{\partial a_j} da_j.$$

Dans cette formule, les dx_j ont la signification qu'on leur donne dans la formule (3); quant aux $\sum \frac{\partial f_i}{\partial a_j} da_j$, ce sont les valeurs des dy_i pris en regardant les x comme des constantes; ce sont les dy_i tirés de (2), et l'on a

$$0 = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + dy_i$$

ou, en vertu de (3) et (2),

$$\begin{aligned} 0 = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (X_{j1} \Sigma A_{1k}\, da_k + \ldots + X_{jr} \Sigma A_{rk}\, da_k) \\ + Y_{i1} \Sigma A_{1k}\, da_k + \ldots + Y_{ir} \Sigma A_{rk}\, da_k. \end{aligned}$$

On en conclut, en égalant les coefficients des da_k,

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (X_{j1} A_{1k} + \ldots + Y_{jr} A_{rk}) + Y_{i1} A_{1k} + \ldots + Y_{ir} A_{rk} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(X_{j1}A'_{1k} + \ldots + X_{jr}A'_{rk}) + Y_{i1}A_{1k} + \ldots + Y_{ir}A_{rk} = 0.$$

Soit F une fonction quelconque : multiplions par $\frac{\partial F}{\partial y_i}$, faisons

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

ajoutons, nous aurons

$$A'_{1k}X_1F + A'_{2k}X_2F + \ldots + A_{1k}Y_1F + A_{2k}Y_2F + \ldots = 0.$$

Donc les Y_iF sont fonctions linéaires des X_iF à coefficients fonctions des a.

Si alors, dans la fonction linéaire

$$t_1Y_1F + t_2Y_2F + \ldots + t_rY_rF,$$

on effectue la substitution S_a représentée par $y_i = f_i(x_1, \ldots, a_1, \ldots)$, elle deviendra

$$u_1X_1F + u_2X_2F + \ldots + u_rX_rF,$$

et les u seront fonctions linéaires des t dont les coefficients seront fonctions des a; on pourra poser

$$(5) \qquad u_j = t_1\psi_{1i}(a_1, \ldots, a_r) + t_2\psi_{2i}(a_1, \ldots, a_r) + \ldots.$$

Si l'on effectue la substitution S_b, Σa_iX_iF se changera en Σv_iZ_iF, et les v seront de la forme

$$v_i = u_1\psi_{1i}(b_1, \ldots, b_r) + \ldots.$$

Les formules (5) représenteront alors un groupe linéaire que M. Lie appelle le *groupe adjoint* du groupe S_a.

Pour ce groupe, les fonctions A_{ij} ne dépendant que des relations entre les a, b, c, les symboles opératoires A_i seront les mêmes que pour le groupe S_a, et les constantes c_{ij}^s auront la même valeur.

Si, dans

$$(6) \qquad \Sigma t_iY_iF = \Sigma u_iX_iF,$$

on fait le changement de variables $y_i = f_i(x_1, \ldots, a_1, \ldots)$, on a une identité; soient $a_1^0, a_2^0, \ldots$ les paramètres de la substitution identique, et faisons la substitution

$$(7) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, a_1^0 + da_1, a_i, \ldots, a_r),$$

nous aurons

$$\Sigma t_i Y_i F = \Sigma t_i \left(Y_i x_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + Y_i x_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \ldots \right);$$

or on a, pour la substitution inverse de (7),

$$x_j = f_j(y_1, \ldots, a_1^0 - da_1, a_2, \ldots)$$

ou

$$\begin{aligned} x_j &= y_j - da_1 \left(\frac{\partial f_j}{\partial a_1} \right) = y_j - Y_{j1} da_1, \\ Y_i x_j &= Y_i y_j - Y_i Y_{j1} da_1 \\ &= Y_{ji} - Y_i Y_{j1} da_1 \\ &= X_{ji} + \frac{\partial X_{ji}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_{ji}}{\partial x_2} dx_2 - \ldots - X_i X_{j1} da_1 \\ &= X_{ji} + \left(\frac{\partial X_{ji}}{\partial x_1} X_{11} + \frac{\partial X_{ji}}{\partial x_2} X_{21} + \ldots - X_i X_{ji} \right) da_1 \\ &= X_{ji} + (X_1 X_{ji} - X_i X_{j1}) da_1. \end{aligned}$$

(6) devient alors

$$\Sigma t_i \left[X_{ji} \frac{\partial F}{\partial x_j} + (X_1 X_{ji} - X_i X_{j1}) \frac{\partial F}{\partial x_j} da_1 \right] = \Sigma u_i X_i F$$

ou, en observant que $t_i = u_i + du_i$,

$$\sum \frac{du_i}{da_1} X_i F + \Sigma u_i (X_1 X_i - X_i X_1) F = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sum \frac{du_i}{da_1} X_i F + \Sigma u_i \Sigma c_{1i}^s X_s F = 0,$$

et cette formule ayant lieu, quel que soit F,

$$\frac{du_s}{da_1} + \Sigma u_j c_{1j}^s = 0,$$

et, si l'on veut,

$$du_s + \Sigma u_j c_{ij}^s \, da_i = 0,$$

c'est l'équation aux différentielles totales du groupe adjoint. Ses équations aux dérivées partielles sont

$$U_i F + \Lambda_i F = 0,$$

$$U_i F = \Sigma u_j c_{ij}^1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \Sigma u_j c_{ij}^2 \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots = \Sigma u_j c_{ij}^s \frac{\partial F}{\partial u_s}.$$

Les substitutions UF ne seront distinctes que si l'on n'a pas de relations de la forme

$$\Sigma \lambda_i \Sigma u_j c_{ij}^s \frac{\partial F}{\partial u_s} = 0$$

ou

$$\Sigma \lambda_i \Sigma c_{ij}^s = 0.$$

Or, si l'on considère l'expression

$$[Y_j \Sigma \lambda_i Y_i - \Sigma(\lambda_i Y_i) Y_j] F = \Sigma c_{ji}^s \lambda_i Y_s F = - \Sigma c_{ij}^s \lambda_i Y_s F,$$

on voit qu'elle sera nulle en même temps que la précédente; donc le groupe adjoint n'aura ses paramètres distincts ou ses U distincts que si le groupe proposé n'a pas de substitution fondamentale Y' donnant

$$(Y' Y_j - Y_j Y') F = 0;$$

Y' est ce que l'on appelle une *substitution fondamentale singulière* (*Ausgezeichnete*, distinguée de S. Lie).

11. — Généralités sur la formation des groupes.

Il n'entre pas dans notre plan de donner une théorie complète des groupes de substitutions. Je laisse de côté systématiquement la théorie

des invariants à l'aide de laquelle on peut trouver un nombre considérable de groupes; mon but est seulement de montrer l'utilité de mes notations.

Il est facile de se procurer un nombre illimité de groupes; la question est plus difficile à traiter quand on se propose de trouver les groupes contenus dans un groupe donné à plusieurs paramètres. Voici toutefois comment on peut théoriquement résoudre ce problème. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_r$ les substitutions fondamentales d'un groupe; si l'on veut trouver un groupe à p paramètres contenu dans ce groupe, il suffira de trouver p fonctions linéaires $k_1, k_2, \ldots, k_p$ de $h_1, h_2, \ldots, h_r$ donnant lieu aux relations

$$(1) \qquad k_i k_j - k_j k_i = \Sigma \gamma_{ij}^s k_s,$$

les γ désignant des constantes. Soit

$$k_i = \alpha_{i1} h_1 + \alpha_{i2} h_2 + \ldots + \alpha_{ir} h_r = \Sigma \alpha_{i\mu} h_\mu;$$

(1) deviendra

$$\Sigma(\alpha_{i\mu}\alpha_{j\nu} - \alpha_{i\nu}\alpha_{j\mu})(h_\mu h_\nu - h_\mu h_\nu) = \Sigma \gamma_{ij}^s \Sigma \alpha_{s\mu} h_\mu$$

ou

$$\Sigma(\alpha_{i\mu}\alpha_{j\nu} - \alpha_{i\nu}\alpha_{j\mu}) \Sigma c_{\mu\nu}^s h_s = \Sigma \gamma_{ij}^s \Sigma \alpha_{s\mu} h_\mu.$$

Ces formules devant avoir lieu entre les h_s qui sont indépendants fournissent chacune r relations; pour que ces relations aient lieu, certaines équations obtenues en éliminant les γ devront avoir lieu entre les α; cette méthode est évidemment impraticable dès que $p > 2$.

Les groupes de substitutions linéaires et homogènes, que nous appellerons *groupes linéaires*, sont de beaucoup les plus importants; ce sont en effet ceux qui se sont présentés les premiers dans la théorie des équations algébriques puis dans la théorie des équations différentielles linéaires (les substitutions de lettres sont des cas particuliers des substitutions linéaires); ensuite, les groupes linéaires continus à un nombre fini de paramètres peuvent servir à former tous les autres (à un nombre fini de paramètres). En effet, quand on est parvenu à former un groupe linéaire, on est par cela même arrivé à se procurer des

relations de la forme $(A_iA_j - A_jA_i)F = \Sigma c_{ij}^s A_s F$, qui suffisent pour déterminer un groupe en faisant usage des variables a. Je ne m'occuperai donc que de la formation des groupes linéaires, et, dans ce qui va suivre, il ne s'agira plus que de substitutions linéaires et homogènes; ces épithètes *linéaires* et *homogènes* seront dorénavant sous-entendues.

12. — Groupes linéaires.

1° Je commencerai par établir une proposition qui permettra de former un grand nombre de groupes. Si s, s', s'', ... sont des substitutions formant un groupe et, si t est une substitution quelconque, tst^{-1}, $ts't^{-1}$, $ts''t^{-1}$, ... seront encore des substitutions formant un groupe; cela résulte de ce que

$$tst^{-1} \times ts't^{-1} = tss't^{-1}.$$

La substitution $ts't^{-1}$ est la transformée de s par t.

Si

$$tst^{-1} = s',$$

on a

$$tst^{-1}tst^{-1} = ts^2t^{-1} = s'^2, \qquad ts^3t^{-1} = s'^3 \ldots ts^2t^{-1} = s'^2,$$

et, en général,

$$tf(s)t^{-1} = f(s'):$$

donc *une substitution et sa transformée ont même équation caractéristique.*

La réciproque est vraie en général, et deux substitutions ayant même équation caractéristique peuvent être transformées l'une dans l'autre; mais il est clair qu'il y aura des exceptions.

Il y a plus : la substitution t peut n'être pas linéaire. Si s est linéaire, tst^{-1} pourra ne pas être linéaire, mais elle aura une équation caractéristique à laquelle elle satisfera et qui sera l'équation de s.

La transformation fournit ainsi une première méthode, d'ailleurs connue depuis longtemps, pour former des groupes linéaires ou non.

2° Rappelons en second lieu que toutes les fonctions d'une même

substitution forment un groupe de substitutions échangeables; c'est un théorème nouveau que notre notation symbolique met en évidence.

3° Nous avons signalé plus haut (§ 3) l'existence de substitutions s et t jouissant des propriétés suivantes; elles sont de degré n et l'on a

$$s^n = 1, \qquad t^n = 1, \qquad st = \varepsilon ts, \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}.$$

Il en résulte que

$$s^\alpha t = ts^\alpha \varepsilon^\alpha, \qquad s^\alpha t^\beta = t^\alpha s^\beta \varepsilon^{\alpha+\beta};$$

donc, en général, si a_p, b_q sont des nombres

$$\Sigma a_p s^p \Sigma b_q t^q = \Sigma a_p b_q s^p t^q = \Sigma a_p b_q \varepsilon^{p+q} t^q s^p,$$

c'est-à-dire, en appelant φ et ψ des symboles de fonctions entières,

$$\varphi(s)\psi(t) = \psi(t\varepsilon)\varphi(s\varepsilon);$$

donc $\varphi(s)\psi(t)$ est la substitution générale d'un groupe à $2n$ paramètres, car

$$\varphi(s)\psi(t)\varphi_1(s)\psi_1(t) = \varphi(s)\varphi_1(s\varepsilon)\psi(t\varepsilon)\psi_1(t\varepsilon),$$

et le second membre est de la forme $\varphi(s)\psi(t)$.

En particularisant les fonctions φ et ψ, on peut obtenir des groupes à moins de $2n$ paramètres; par exemple, si n est pair, $\varphi(s^2)\psi(t^2)$ formera un groupe à n paramètres, etc. Ces groupes sont nouveaux.

4° Les substitutions $\varphi(st)\psi(st)$, en conservant les mêmes notations, forment évidemment un groupe.

5° Si n a pour diviseur δ, $f(s^\delta, t^\delta)$ représente un groupe, etc.

6° Les substitutions orthogonales forment un groupe bien connu, et l'on connaît bien des moyens pour se procurer de telles substitutions. Soit $\Sigma a_{ij} z_{ij}$ une substitution orthogonale de degré n; posons

$$s_{pq} = \Sigma a_{ip} a_{jq} z_{ij};$$

nous aurons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} s_{pq}s_{kl} &= \Sigma a_{ip}a_{jq}\tau_{ij}\Sigma a_{ik}a_{jl}\tau_{ij} \\ &= \Sigma(a_{ip}a_{1q}a_{1k}a_{jl} + a_{ip}a_{2q}a_{2k}a_{jl} + \ldots)\tau_{ij} \\ &= (a_{1q}a_{1k} + a_{2q}a_{2k} + \ldots)\Sigma a_{ip}a_{jl}\tau_{ij}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$s_{pq}s_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \gtrless k \\ s_{pl} & \text{si } q = k \end{cases}.$$

Les substitutions s_{pq} jouissent donc des mêmes propriétés que les substitutions τ_{pq}; si l'on suppose p et q inférieurs à n, les substitutions s_{pq} formeront un groupe discontinu à l'aide duquel on pourra former, comme avec des substitutions τ_{ij}, de nouvelles substitutions s, t, jouissant des propriétés

$$s^m = 1, \qquad t^m = 1, \qquad st = \varepsilon ts. \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}},$$
$$m < n.$$

Ces nouvelles substitutions pourront à leur tour servir à former des groupes continus à moins de n paramètres en procédant comme aux numéros précédents.

7° Supposons la substitution $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ non plus orthogonale, mais quelconque, et posons

$$P_{qk} = a_{1q}a_{1k} + a_{2q}a_{2k} + \ldots + a_{nq}a_{nk}.$$

La formule (1) du numéro précédent donnera

$$s_{pq}s_{kl} = P_{qk}s_{pl},$$
$$s_{kl}s_{pq} = P_{lp}s_{pq},$$

d'où

$$s_{pq}s_{kl} - s_{kl}s_{pq} = P_{qk}s_{pl} - P_{lp}s_{kq}.$$

Les substitutions s_{pq}, où l'on peut supposer p et q moindres que n forment donc un système fondamental qui pourra servir à former une infinité de groupes continus à moins de n paramètres.

8° Je suppose que l'on sache former un groupe à r paramètres pour les substitutions de degré $n < \nu$; soient $h_1, h_2, \ldots, h_r$ les substitutions fondamentales de ce groupe et

$$h_p = \Sigma a_{ij}^{(p)} \tau_{ij}.$$

Supposons

$$h_p h_q - h_q h_p = \Sigma c_{ij}^s h_s.$$

Parmi les substitutions de degré ν, on pourra en choisir n^2 jouissant des propriétés

$$s_{pq} s_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \gtrless k \\ s_{pl} & \text{si } q = k \end{cases},$$

p et q restant inférieurs ou au plus égaux à r; si l'on pose alors

$$\Pi_p = \Sigma a_{ij}^{(p)} s_{ij},$$

il est clair que l'on aura

$$\Pi_p \Pi_q - \Pi_q \Pi_p = \Sigma c_{ij}^s \Pi_s;$$

on saura donc aussi former un groupe à r paramètres, avec des substitutions de degré n.

On voit donc comment on pourra simplifier la recherche des groupes linéaires en partant des substitutions du second degré pour s'élever successivement aux substitutions de degré supérieur.

13. — Substitutions du second degré.

Les substitutions du second degré sont intéressantes à considérer en elles-mêmes; elles ont été entre les mains de M. Poincaré un puissant instrument de recherches: leurs groupes, faciles à construire, permettront de construire des groupes pour les substitutions de degré plus élevé. Enfin, elles donnent lieu à des interprétations géométriques remarquables.

Soit

$$(1) \qquad s = a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + a_{21}\tau_{21} + a_{22}\tau_{22}.$$

Si l'on pose

$$i = \tau_{12} - \tau_{21}, \qquad j = (\tau_{22} - \tau_{11})\sqrt{-1},$$

on aura

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad ij = -ji;$$

en sorte que, si l'on fait $ij = k$, on aura

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & j^2 &= -1, & k^2 &= -1, \\ ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \end{aligned}$$

et les substitutions i, j, k jouiront des propriétés des clefs d'un quaternion.

Si l'on pose

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$

on aura

$$\begin{aligned} &a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + a_{21}\tau_{21} + a_{22}\tau_{22} \\ &\quad = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij \\ &\quad = \alpha + \beta(\tau_{12} - \tau_{21}) + \gamma\sqrt{-1}\,(\tau_{22} - \tau_{11}) + \delta(\tau_{12} + \tau_{21})\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et, en identifiant (en observant que $\alpha = \alpha\tau_1 = \alpha\tau_{12}$),

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\gamma\sqrt{-1} + \alpha, & a_{22} &= \gamma\sqrt{-1} + \alpha, \\ a_{12} &= \beta + \delta\sqrt{-1}, & a_{21} &= -\beta + \delta\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

On en tire

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2.$$

Le déterminant de la substitution $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ *est donc* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$. *Son équation caractéristique est*

$$s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0;$$

par suite, on pourra poser $\alpha = \rho\cos\varphi$, $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} = \rho\sin\varphi$, et les racines de l'équation caractéristique seront

$$p(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi) = \rho e^{\pm\varphi\sqrt{-1}};$$

ρ^2 sera alors le déterminant de la substitution et l'on aura

$$F(s) = -(s - \rho e^{-\varphi\sqrt{-1}})\frac{F(\rho e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{2\rho\cos\varphi} + (s - \rho e^{\varphi\sqrt{-1}})\frac{F(\rho e^{\varphi\sqrt{-1}})}{2\rho\cos\varphi}.$$

Nous poserons, comme dans la théorie des quaternions,

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}} = \cos\theta,$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}} = \cos\psi\sin\theta,$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}} = \sin\psi\sin\theta,$$

et la substitution s prendra la forme

$$\begin{cases} s = p(\cos\varphi + u\sin\varphi), \\ u = i\cos\theta + j\cos\psi\sin\theta + k\sin\psi\sin\theta; \end{cases}$$

la substitution u a alors pour carré -1, en sorte que

$$s^\alpha = \rho^\alpha(\cos\alpha\varphi + u\sin\alpha\varphi) = \rho^\alpha e^{u\alpha}$$

ou

$$s^\alpha = e^{\alpha(u+\log\rho)}.$$

Les substitutions à un paramètre sont ainsi mises sous forme exponentielle.

La théorie des quaternions et celle des substitutions linéaires du second degré sont donc étroitement liées, mais la théorie des substitutions est beaucoup plus générale et l'emploi des quaternions a l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à des substitutions à coefficients imaginaires, aussi nous reviendrons à nos conventions ordinaires.

Nous poserons dorénavant

$$i = \tau_{12} + \tau_{21}, \qquad j = \tau_{11} - \tau_{22};$$

nous aurons

$$i^2 = 1, \qquad j^2 = 1, \qquad ij = -\tau_{12} + \tau_{11} = -ji,$$

et nous aurons les formules fondamentales

$$\begin{aligned} s &= a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + a_{21}\tau_{21} + a_{22}\tau_{22} = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij \\ &= \tau_{11}(\alpha+\gamma) + \tau_{12}(\beta-\delta) + \tau_{21}(\beta+\delta) + \tau_{22}(\alpha-\gamma), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \alpha + \gamma, & a_{22} = \alpha - \gamma. \\ a_{12} = \beta - \delta, & a_{21} = \beta + \delta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}, & \gamma = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2}, \\ \beta = \dfrac{a_{12} + a_{21}}{2}, & \delta = \dfrac{a_{21} - a_{12}}{2}. \end{cases}$$

L'équation caractéristique est

$$s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Si nous observons que

$$(\beta i + \gamma j + \delta ij)^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2,$$

nous pourrons poser : 1°

$$\begin{aligned} &\rho^2 = \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2, \\ &\alpha = \rho\cos\varphi, \qquad \sqrt{\delta^2 - \beta^2 - \gamma^2} = \rho\sin\varphi, \\ &s = \rho\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}}\right) \end{aligned}$$

ou, en posant

$$u = \frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}}, \qquad u^2 = -1,$$

$$s = \rho(\cos\varphi + u\sin\varphi);$$

on aura alors

$$s^\alpha = \rho^\alpha(\cos\alpha\varphi + u\sin\alpha\varphi).$$

2° Nous pourrons aussi poser

$$\begin{aligned} &\rho^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2, \\ &\alpha = \beta\cosh\varphi, \qquad \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2} = \rho\sinh\varphi. \\ &s = \rho(\cosh\varphi + u\sinh\varphi), \qquad u = \frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}}, \qquad u^2 = 1 \end{aligned}$$

et, si l'on veut

$$s^\alpha = \rho^\alpha(\cosh \alpha\varphi + u \sinh \alpha\varphi).$$

Dans le premier cas, on aura, comme dans le second,

$$s = \rho e^{u\varphi}.$$

3° Si $\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0$, on ne peut plus procéder comme nous l'avons fait, mais en posant

$$r = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \qquad \beta = r\cos\varphi, \qquad \gamma = r\sin\varphi,$$

on a

$$s = \alpha + r(i\cos\varphi + j\sin\varphi + ij)$$

ou

$$s = \alpha + ru \qquad \text{et} \qquad u^2 = 0, \qquad s^p = \alpha^p + p\alpha^{p-1}ru.$$

Lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels, les transformations que nous venons d'indiquer ont surtout pour objet de conserver à la substitution s une forme dégagée d'imaginaires; en se plaçant à ce point de vue, la substitution

$$\rho(\cosh \varphi + u \sinh \varphi)$$

sera dite *hyperbolique;* la substitution

$$\rho(\cos\varphi + u\sin\varphi)$$

sera *elliptique*. Enfin,

$$\alpha + ru$$

sera *parabolique*.

Lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seront imaginaires, on pourra mettre la substitution s sous la forme

$$S + T\sqrt{-1},$$

S et T étant réels; S et T seront alors ou elliptiques, ou hyperboliques, ou paraboliques.

Nous allons maintenant essayer de former les groupes à plusieurs paramètres. Ces groupes seront représentés par des substitutions de la forme $e^{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij}$; on pourra toujours supposer que α n'entre pas en exposant, car, s'il n'y entre pas, on pourra l'introduire, ce qui revient

à multiplier par un nombre toutes les substitutions du groupe et, s'il y entre, on pourra le supprimer, ce qui reviendra encore à multiplier par un nombre toutes les substitutions du groupe. Le groupe linéaire du second degré est, au fond, à trois paramètres β, γ, δ, α ne comptant pas.

Nous allons chercher tout d'abord deux substitutions fondamentales

$$s = \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$s' = \beta' i + \gamma' j + \delta' ij;$$

nous aurons

$$ss' - s's = 2(\delta\gamma' - \gamma\delta')i + 2(\beta\delta' - \delta\beta')j + 2(\beta\gamma' - \gamma\beta')ij;$$

pour que s et s' forment un système fondamental, il faut qu'il existe des constantes c et c', telles que $ss' - sc' = 2cs + 2c's'$ ou que

$$\delta\gamma' - \gamma\delta' = c\beta - c'\beta', \qquad \beta\delta' - \delta\beta' = c\gamma + c'\gamma', \qquad \beta\gamma' - \gamma\beta = c\delta + c'\delta',$$

ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} \beta\beta' & \gamma\delta' - \gamma\delta' \\ \gamma\gamma' & \beta\delta' - \delta\beta' \\ \delta\delta' & \beta\gamma' - \gamma\beta' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 - (\beta\delta' - \delta\beta')^2 + (\gamma\delta' - \delta\gamma')^2 = 0;$$

telle est la relation qui doit exister entre les substitutions fondamentales d'un groupe à deux paramètres de déterminant 1. Cette équation peut s'écrire

$$(\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)(\beta'^2 + \gamma'^2 - \delta'^2) - (\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta')^2 = 0.$$

14. — Quelques mots sur les groupes discontinus.

Les groupes discontinus sont ceux dans lesquels les substitutions sont telles que, une substitution *quelconque* étant choisie, il n'en existe

pas d'autres en différant infiniment peu. Je dis *quelconque*, parce que le groupe serait encore discontinu s'il y avait un nombre fini de substitutions ne jouissant pas de cette propriété.

On peut se procurer des groupes discontinus linéaires d'un grand nombre de manières que nos notations symboliques mettent en évidence. D'abord le groupe $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$, dans lequel les a_{ij} sont entiers, est évidemment discontinu; la même chose aurait lieu si les a étaient des multiples d'un même nombre.

Nous avons vu qu'il était possible de trouver des substitutions s_{ij} différentes des τ_{ij}, mais jouissant des mêmes propriétés

$$s_{ij}s_{kl} = \begin{cases} s_{il}, & s_{ij} = k, \\ 0, & s_{ij} \gtrless k. \end{cases}$$

Les substitutions $\Sigma a_{ij}s_{ij}$, dans lesquelles les a sont des nombres entiers, formeront évidemment un groupe discontinu. On obtient des sous-groupes en imposant au déterminant $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ la condition de rester égal à ± 1.

On pourrait obtenir des groupes à coefficients imaginaires en prenant pour les a_{ij} des expressions de la forme

$$A_0 + A_1\varepsilon + \ldots + A_{p-1}\varepsilon^{p-1},$$

ε désignant une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des entiers.

Il est très facile de trouver des substitutions satisfaisant à une équation binome, par exemple à $s^2 = 1$, si s, par exemple, est une substitution dont l'équation n'a pas de racines multiples, on pourra mettre $f(s)$ sous la forme

$$f(s) = f(s_1)\xi_1 + f(s_2)\xi_2 + \ldots + f(s_n)\xi_n,$$

$s_1, s_2, \ldots$ désignant les racines de l'équation de s et ξ_i des substitutions, telles que

$$\xi_i\xi_j = 0, \qquad \xi_i^2 = \xi_i, \qquad \Sigma\xi_i = 1.$$

Alors, en prenant

$$f(s) = \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \ldots,$$

on aura $[f(s)]^2 = 1$. Soient s et t deux substitutions non échangeables et telles que $s^2 = 1$, $t^2 = 1$, une fonction de s et t sera de la forme

$$a + bs + ct + dst + cts + fsts + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant des nombres; le nombre des symboles $s, t, st, sts, \ldots$ sera limité, car $(st)^2 = 1$, et les seuls de ces symboles irréductibles sont

$$1, \quad s, \quad t, \quad st, \quad ts, \quad tst, \quad sts;$$

les fonctions entières et à coefficients entiers de s et t formeront donc un groupe discontinu.

Il ne serait pas difficile de généraliser ces considérations. Je crois que ce qui précède suffira pour montrer l'utilité du genre de calcul que je viens d'esquisser.

Un mot avant de terminer : Le calcul des substitutions peut être considéré comme l'interprétation, sous forme concrète, de la théorie générale des symboles imaginaires auxquels on a donné le nom de *clefs;* les clefs peuvent, en effet, être considérées comme représentant des substitutions. Les clefs, auxquelles on a donné le nom d'*ensembles* et qui satisfont aux relations

$$\xi_i \xi_j = 0, \qquad \xi_i^2 = \xi_i,$$

sont les substitutions interpolaires de déterminant nul, que nous avons rencontrées plusieurs fois. Les quaternions sont des substitutions particulières du second degré, comme nous l'avons montré.

Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Ingénieur des Télégraphes.

1. Dans une Note récemment présentée à l'Académie des Sciences (¹), nous avons énoncé les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus dans l'étude du déplacement d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques.

Ce problème n'avait été étudié jusqu'ici que dans le cas particulier où les points de la droite mobile restent sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan, par M. Darboux et par M. Mannheim (²). On peut résumer ainsi les résultats obtenus par ces deux éminents géomètres :

1° *Si quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, tous les points de cette droite restent aussi sur des sphères, dont les centres ont pour lieu une conique; par suite, deux points, réels ou imaginaires, de la droite décrivent des courbes planes.*

(¹) E. DUPORCQ, *Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques* (*Comptes rendus*, séance du 15 novembre 1897).

(²) MANNHEIM, *Principes et développ. de Géom. cin.*, p. 180.

2° *Dans le mouvement à deux paramètres d'une droite dont trois points se déplacent sur trois sphères dont les centres sont en ligne droite, tous les points de la droite décrivent des sphères ayant leurs centres en ligne droite. Un point de la droite décrit un plan.*

Ces résultats rappelés, nous allons aborder l'étude du problème général que nous avons en vue, en commençant par quelques remarques géométriques.

I.

2. Soient, dans l'espace, D_1, D_2, D_3 trois positions d'une droite D, sur lesquelles m_1, m_2 et m_3 sont les positions d'un certain point quelconque m de la droite D. Les plans normaux aux segments m_2m_3, m_3m_1 et m_1m_2 en leurs milieux passent respectivement, comme l'on sait, par trois droites fixes, Δ_{23}, Δ_{31} et Δ_{12}, quel que soit le point m sur la droite D. L'axe de la circonférence $(m_1m_2m_3)$ rencontrant évidemment ces trois droites, il a pour lieu, quand le point m décrit la droite D, l'hyperboloïde $H_{1.2.3}$ qui admet les trois droites Δ pour génératrices.

Soit maintenant D_4 une quatrième position de la droite D; considérons les hyperboloïdes $H_{1.2.3}$ et $H_{1.2.4}$: ils ont en commun la droite $\Delta_{1.2}$, et le reste de leur intersection est une cubique gauche Γ : celle-ci est le lieu des centres des sphères $(m_1m_2m_3m_4)$ (¹).

Soit enfin D_0 une nouvelle position de la droite D : la cubique gauche Γ rencontre l'hyperboloïde $H_{1.2.0}$ en six points, dont deux appartiennent à la droite $\Delta_{1.2}$; les quatre autres points sont chacun le centre d'une sphère contenant les cinq positions d'un même point de la droite D. Par suite :

Étant données cinq positions d'une même droite, il existe en général quatre points de cette droite dont les cinq positions sont sur une même sphère.

(¹) On obtient, comme cas particulier, le théorème de M. Haag, sur le lieu des centres des sphères osculatrices aux trajectoires des points d'une droite mobile.

Il en résulte que :

Si cinq points d'une droite décrivent des trajectoires sphériques, il en est de même de tous ses points.

5. Pour que tous les points de la droite D aient leurs cinq positions sur une même sphère, il faut et il suffit évidemment que l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$ contienne une infinité de points de la cubique Γ, soit qu'il la contienne tout entière, soit que, celle-ci se décomposant en une conique et une droite, l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$ contienne seulement cette conique ou cette droite. Nous en déduisons immédiatement la propriété suivante :

Si tous les points d'une droite se déplacent sur des sphères, le lieu des centres de ces sphères est une cubique gauche, une conique ou une droite.

Ces deux derniers cas sont ceux que nous avons rappelés précédemment : c'est donc du premier seulement que nous allons nous occuper.

II.

4. Nous allons donc rechercher à quelles conditions doivent être assujetties quatre positions données D_1, D_2, D_3 et D_4 de la droite D, pour qu'on puisse trouver une infinité de positions D_0 de cette droite, telles que l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$, qui contient évidemment la droite $\Delta_{1.2}$, passe aussi par tous les autres points communs aux deux hyperboloïdes $H_{1.2.3}$ et $H_{1.2.4}$.

Nous pouvons toujours supposer que la droite D est l'arête Oz d'un trièdre trirectangle $Oxyz$, et qu'elle est entraînée par un certain déplacement de ce trièdre. Soit, en outre, $\omega\xi\eta\zeta$ un trièdre trirectangle fixe dans l'espace. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport aux axes mobiles, et par ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes. On peut tou-

jours poser

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\xi + a'\eta + a''\zeta - p, \\ y = b\xi + b'\eta + b''\zeta - q, \\ z = c\xi + c'\eta + c''\zeta - r, \end{cases}$$

$a, a', \ldots, c''$ désignant les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires. Les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes sont

$$(2)\qquad \begin{cases} ap + bq + cr = l, \\ a'p + b'q + c'r = m, \\ a''p + b''q + c''r = n. \end{cases}$$

Posons, en outre,

$$p^2 + q^2 + r^2 = l^2 + m^2 + n^2 = h^2,$$
$$h^2 - 2(l\xi + m\eta + n\zeta) = \mathrm{P}.$$

Nous affecterons des indices 1, 2, 3 et 4 les coordonnées x, y, z et les paramètres correspondant aux positions D_1, D_2, D_3 et D_4, les lettres sans indice correspondant aux positions D_0, qui satisfont au problème proposé, supposé possible.

Ceci posé, recherchons quelle est, par rapport aux axes fixes, l'équation de l'hyperboloïde $\mathrm{H}_{1.2.3}$; soit α un point de cette surface : il est, d'après la définition de $\mathrm{H}_{1.2.3}$, équidistant des trois positions m_1, m_2 et m_3 d'un certain point m de la droite D; par suite, si l'on considère le mouvement inverse de celui du trièdre $\mathrm{O}xyz$, et si l'on désigne par α_1, α_2 et α_3 les trois positions qu'occupe alors le point α par rapport à ce trièdre, supposé immobile, il existera une sphère passant par les points α_1, α_2 et α_3, et ayant son centre sur $\mathrm{O}z$. On aura donc

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons x, y, z par leurs valeurs (1)

en fonction de ξ, η, ζ, nous obtiendrons l'équation cherchée de l'hyperboloïde $H_{1.2.3}$. En tenant compte des notations (2), elle se réduit à

$$H_{1.2.3} = \begin{vmatrix} P_1 & z_1 & 1 \\ P_2 & z_2 & 1 \\ P_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Or, nous voulons que l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$ passe par tous les points communs aux hyperboloïdes $H_{1.2.3}$ et $H_{1.2.4}$; nous devons donc pouvoir trouver deux nombres λ_3 et λ_4, tels que l'on ait identiquement

$$H_{0.1.2} \equiv \lambda_3 H_{1.2.3} + \lambda_4 H_{1.2.4},$$

ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P - \lambda_3 P_3 - \lambda_4 P_4 \\ z_1 & z_2 & z - \lambda_3 z_3 - \lambda_4 z_4 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda_3 \quad - \lambda_4 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Il faut et il suffit, pour cela, que l'on puisse déterminer deux nouveaux paramètres numériques λ_1 et λ_2 [1], tels qu'on ait les

---

[1] Ce résultat n'est pas tout à fait évident : la question revient à montrer que X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant quatre formes linéaires données, les formes linéaires les plus générales X et Y, telles que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X \\ Y_1 & Y_2 & Y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sont fournies par les égalités

$$(2) \qquad X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \qquad Y = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2,$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres *numériques* dont la somme est égale à 1. La relation (1) peut, en effet, s'écrire

$$\frac{X - X_2}{Y - Y_2} \equiv \frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2}.$$

A moins que les coefficients des variables ne soient proportionnels dans les

identités

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$
$$z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4,$$
$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4,$$

qui reviennent aux suivantes :

$$(1) \qquad 1 = \sum_1^4 \lambda_i.$$

$$(2) \qquad c = \sum_1^4 \lambda_i c_i, \qquad c' = \sum_1^4 \lambda_i c'_i, \qquad c'' = \sum_1^4 \lambda_i c''_i.$$

$$(3) \qquad l = \sum_1^4 \lambda_i l_i, \qquad m = \sum_1^4 \lambda_i m_i, \qquad n = \sum_1^4 \lambda_i n_i.$$

$$(4)\,(5) \qquad r = \sum_1^4 \lambda_i r_i, \qquad h^2 = \sum_1^4 \lambda_i h_i^2.$$

On doit, de plus, avoir la relation

$$(6) \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 0.$$

En portant dans les équations (4), (5) et (6) les valeurs de c, c', c'', l, m, n fournies par (2) et (3), et en y joignant l'équation (1), on aura quatre équations en λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 ; elles devront avoir une infinité de systèmes de solutions communes, et, à chacun de ces sys-

---

deux termes de la seconde fraction, on devra donc avoir, λ_1 désignant un *nombre* quelconque,

$$X - X_2 = \lambda_1 (X_1 - X_2), \qquad Y - Y_2 = \lambda_1 (Y_1 - Y_2),$$

ce qui revient aux égalités (2). Or, dans le cas particulier qui nous occupe, si l'on suppose que les coefficients des variables ξ, η et ζ sont proportionnels dans les formes $P_1 - P_2$ et $z_1 - z_2$, quel que soit le choix du point O sur la droite D, et quelles que soient les positions D_1 et D_2 occupées par cette droite dans son déplacement, il en résulte, ou qu'un certain point de cette droite doit rester fixe, ou que toutes les positions qu'elle occupe sont parallèles : ce sont évidemment des cas dont nous ne tenons pas compte dans notre étude.

tèmes correspondra une position D_0 fournie par les équations (2) et (3). L'équation (1) permet de ramener la considération de ces quatre équations en λ à celle de trois équations homogènes : les équations (5), (6) et (4) peuvent, en effet, s'écrire

$$(5') \qquad l^2 + m^2 + n^2 = \sum_1^4 \lambda_i (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2),$$

$$(6') \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = \sum_1^4 \lambda_i (c_i^2 + c_i'^2 + c_i''^2),$$

$$(4') \qquad cl + c'm + c''n = \sum_1^4 \lambda_i (c_i l_i + c_i' m_i + c_i'' n_i).$$

Les relations (1), (2) et (3) permettent de mettre ces équations sous les formes homogènes suivantes :

$$\left(\sum_1^4 \lambda_i l_i\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i m_i\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i n_i\right)^2 = \left(\sum_1^4 \lambda_i\right)\left[\sum_1^4 \lambda_i (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2)\right],$$

$$\left(\sum_1^4 \lambda_i c_i\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i'\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i''\right)^2 = \left(\sum_1^4 \lambda_i\right)\left[\sum_1^4 \lambda_i (c_i^2 + c_i'^2 + c_i''^2)\right],$$

$$\left(\sum_1^4 \lambda_i c_i\right)\left(\sum_1^4 \lambda_i l_i\right) + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i'\right)\left(\sum_1^4 \lambda_i m_i\right) + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i''\right)\left(\sum_1^4 \lambda_i n_i\right)$$
$$= \left(\sum_1^4 \lambda_i\right)\left[\sum_1^4 \lambda_i (c_i l_i + c_i' m_i + c_i'' n_i)\right],$$

qui se réduisent à

$$(7) \quad \begin{cases} 0 = Q = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(l_i - l_j)^2 + (m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2], \\ 0 = Q' = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(c_i - c_j)^2 + (c_i' - c_j')^2 + (c_i'' - c_j'')^2], \\ 0 = Q'' = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(c_i - c_j)(l_i - l_j) \\ \qquad + (c_i' - c_j')(m_i - m_j) + (c_i'' - c_j'')(n_i - n_j)]. \end{cases}$$

Il serait facile de former les conditions pour que ces trois équations aient une infinité de solutions communes; mais, pour en tirer des conclusions, il est préférable d'interpréter géométriquement ces équations elles-mêmes.

III.

6. Le point m_0, situé sur la droite D_0 à la distance ρ du point O, a pour coordonnées

$$\alpha = l + c\rho, \qquad \beta = m + c'\rho, \qquad \gamma = n + c''\rho,$$

et, en vertu des relations (2) et (3) du paragraphe précédent, on a

$$\alpha = \sum_1^4 \lambda_i \alpha_i, \qquad \beta = \sum_1^4 \lambda_i \beta_i, \qquad \gamma = \sum_1^4 \lambda_i \gamma_i.$$

Les paramètres λ sont donc les *coordonnées barycentriques* du point m_0 par rapport au tétraèdre $m_1 m_2 m_3 m_4$. Or, le point m_0 devant rester sur la sphère circonscrite à ce tétraèdre, les paramètres λ devront satisfaire à l'*équation barycentrique* de cette sphère, rapportée au tétraèdre en question. Ils doivent, de même, satisfaire aux équations barycentriques analogues correspondant aux différents points de la droite D. Toutes ces équations barycentriques, considérées comme rapportées au même tétraèdre $m_1 m_2 m_3 m_4$, représentent des quadriques circonscrites à ce tétraèdre, qui doivent donc avoir une infinité de points communs, dont le lieu sera justement la trajectoire du point m. Nous pouvons d'ailleurs supposer que les quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 ne sont pas dans un même plan, puisque nous avons écarté le cas où tous les points de la droite D décrivent des courbes planes : il en résulte que la courbe commune aux quadriques considérées ne peut être plane, et, comme elle est sur une surface à génératrices imaginaires, elle ne peut être qu'une biquadratique gauche : les quadriques envisagées doivent donc former un faisceau linéaire. Or l'équation barycentrique de la sphère $(m_1 m_2 m_3 m_4)$

$$(1) \qquad 0 = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2 + (\gamma_i - \gamma_j)^2]$$

peut s'écrire, en tenant compte des relations (7)

$$(2) \qquad Q\rho^2 + 2Q''\rho + Q' = 0.$$

Nous retrouvons bien que les trois équations (7) doivent avoir une infinité de solutions communes, et l'analyse précédente nous a prouvé que cette condition était suffisante.

Nous pouvons, de plus, énoncer le résultat suivant :

Si tous les points d'une droite mobile se déplacent sur des sphères dont les centres appartiennent à une cubique gauche, ces points décrivent, en général, des biquadratiques gauches.

7. Supposons donc que l'on ait

$$Q'' = \sigma Q + \sigma' Q'.$$

L'équation (2) de la sphère $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ peut s'écrire

$$Q(\rho^2 + 2\sigma\rho) + Q'(2\sigma'\rho + 1) = 0.$$

Considérons les deux valeurs de ρ données par l'équation

$$(1) \qquad \theta(\rho^2 + 2\sigma\rho) + 2\sigma'\rho + 1 = 0;$$

pour ces deux valeurs, l'équation de la sphère prend la même forme

$$Q - \theta Q' = 0.$$

Il en résulte que, si m et m' sont les deux points de la droite D fournis par ces deux valeurs de ρ, les tétraèdres

$$m_1 m_2 m_3 m_4 \quad \text{et} \quad m'_1 m'_2 m'_3 m'_4$$

ont leurs arêtes correspondantes proportionnelles, puisque l'équa-

tion (1) n° 6 peut s'écrire

$$0 = \sum_{1}^{4} \lambda_i \lambda_j \overline{m_i m_j}^2 .$$

Ces tétraèdres sont donc semblables.

Réciproquement, si, pour deux valeurs de ρ, l'équation homogène (2) représente la même surface, toutes les quadriques représentées par cette équation forment un faisceau linéaire.

L'équation (1) nous montre que les points m et m' auxquels correspondent les tétraèdres semblables forment une involution sur la droite D. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants, qui ne s'appliquent, bien entendu, qu'au cas où les points de la droite mobile restent sur des sphères dont les centres ne sont pas dans un même plan :

Si tous les points d'une droite D *décrivent des biquadratiques sphériques, il existe sur cette droite une involution* (m, m') *telle que les trajectoires des points* m *et* m' *sont semblables.*

Réciproquement, si quatre segments égaux joignent les sommets homologues de deux tétraèdres semblables, les droites qui portent ces segments sont quatre positions d'une droite dont tous les points décrivent des biquadratiques sphériques.

Le problème que nous nous sommes proposé se trouve, dès maintenant, complètement résolu par le théorème précédent.

8. Soient $a_1 a_2 a_3 a_4$ et $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ deux tétraèdres semblables, tels que les quatre segments aa' soient égaux; prenons leur longueur commune pour unité de longueur : les coordonnées du point m, situé sur la droite aa' à la distance ρ du point a seront

$$(1-\rho)l + \rho l', \qquad (1-\rho)m + \rho m', \qquad (1-\rho)n + \rho n',$$

l, m, n et l', m', n' désignant les coordonnées des points a et a'. Soit k

le rapport de similitude des deux tétraèdres, et posons

$$Q = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(l_i - l_j)^2 + (m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2],$$

$$Q_1 = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(l_i - l_j)(l'_i - l'_j) + (m_i - m_j)(m'_i - m'_j) + (n_i - n_j)(n'_i - n'_j)].$$

L'équation barycentrique de la sphère $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ peut alors s'écrire

$$[(1 + k^2)\rho^2 - 2\rho + 1]Q + 2\rho(1 - \rho)Q_1 = 0.$$

L'involution (m, m') est donc définie par les deux couples de points

$$(1 + k^2)\rho^2 - 2\rho + 1 = 0, \qquad \rho(1 - \rho) = 0.$$

Pour que le point central de cette involution soit rejeté à l'infini, il faut et il suffit que les deux segments ainsi définis aient le même milieu, ce qui donne

$$k^2 = 1.$$

Par suite :

Tous les points d'une droite décrivant des biquadratiques sphériques, si deux points m et m' décrivent des trajectoires directement ou inversement égales, il en est de même des extrémités de tout segment de la droite, dont le milieu coïncide avec celui du segment mm'.

IV.

9. Il nous est facile maintenant d'étudier les particularités que peut présenter le déplacement d'une droite dont tous les points décrivent des biquadratiques sphériques.

Supposons d'abord

$$k \neq 1.$$

On sait que, dans ce cas, k désignant le rapport de similitude de

deux figures semblables (a) et (a'), on peut déterminer un axe $\omega\zeta$ tel que, par une rotation d'un angle φ autour de cet axe, la figure (a) vienne en coïncidence avec une figure homothétique à la figure (a') par rapport au centre ω. En désignant par ξ, η, ζ les coordonnées du point a, on a alors visiblement

$$\overline{aa'}^2 = (1 + k^2 - 2k\cos\varphi)(\xi^2 + \eta^2) + (1 - k)^2\zeta^2,$$

ce qui montre que, pour que les points a et a' se trouvent à une distance donnée, le point a doit appartenir à un certain ellipsoïde de révolution.

De ce qui précède résulte immédiatement que, si le point a décrit sur cet ellipsoïde une trajectoire sphérique (a), tous les points de la droite aa' décrivent aussi des trajectoires sphériques : la courbe (a), commune à une sphère et à une quadrique de révolution, se projette, comme on sait, suivant une parabole, sur le plan déterminé par l'axe de révolution $\omega\zeta$ et par le centre de la sphère : cette trajectoire est donc, d'après une dénomination de M. Darboux, une *cartésienne* sphérique. Par suite :

Les trajectoires de tous les points de la droite D *sont des cartésiennes sphériques.*

10. Toutes les quadriques qui passent par la courbe (a) ayant un cône asymptote de la forme

$$\xi^2 + \eta^2 + \lambda\zeta^2 = 0$$

sont de révolution : à chacun des ellipsoïdes correspond une infinité de courbes (a') fournies par les valeurs de k et de φ satisfaisant à la relation

$$\lambda(1 + k^2 - 2k\cos\varphi) = (1 - k)^2.$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, on peut prendre k infini, φ étant alors indéterminé. Le point a est alors le point central de l'involution (m, m') sur la droite D. Le point ω devient le centre de la sphère qui passe par la trajectoire (a), et la droite D est parallèle à la position que vient

occuper le rayon ωa, si on le fait tourner d'un certain angle φ autour de $\omega\zeta$.

Le déplacement de la droite D peut donc être défini de la manière suivante :

Soit (a) une cartésienne, située sur une sphère de centre ω et soit P *le plan mené par ω normalement à la direction commune des axes de révolution des quadriques qui passent par (a). Soit α la projection du point a sur le plan* P, *enfin b un point de ce plan tel que les segments αO et αb soient égaux et fassent entre eux un angle constant φ. Tous les points de la droite ab, dont la grandeur est invariable, décrivent des cartésiennes, quand le point a décrit (a).*

On voit que le point b décrit une *cartésienne plane*.

11. On peut toujours choisir les axes de coordonnées, de sorte que la courbe (a) ait pour équations

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \qquad \zeta^2 = A\xi + By + C.$$

La cubique gauche Γ, lieu des centres des sphères sur lesquelles se déplacent les points de la droite mobile, se trouve alors représentée par les équations

$$\xi = \frac{A\rho(1-\cos\varphi)(1+\rho\cos\varphi)}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}, \quad \eta = \frac{A\rho^2\sin\varphi(1-\cos\varphi)}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}, \quad \zeta = \frac{B(1-\cos\varphi)\rho}{1+\rho}.$$

On en déduit que :

Le point b est, en général, le seul point réel de la droite mobile dont la trajectoire soit plane.

La cubique Γ n'a, en général, qu'une asymptote réelle, normale au plan P; *les directions isotropes de ce plan sont les deux autres directions asymptotiques.*

Par suite :

La cubique Γ se projette sur le plan P *suivant une circonférence.*

12. Ce déplacement est le déplacement le plus général de la droite D, tant que le point central de l'involution (m, m') est à distance finie. Il présente des cas particuliers intéressants.

Supposons d'abord que le plan P soit un plan de symétrie de la cartésienne (a) : elle se projette alors sur ce plan suivant un cercle double; il en est de même alors de toutes les trajectoires (m) : la trajectoire (b) se réduit également à un cercle double. De plus, l'axe de ce cercle (b) faisant évidemment partie du lieu des centres, la cubique Γ se décompose en cette droite et en un cercle du plan P.

13. Supposons maintenant l'angle φ égal à π : il est bien évident que le point c, symétrique de b par rapport à a, reste alors sur l'axe $\omega\zeta$; il en résulte que la droite à l'infini du plan P fait alors partie de la cubique Γ, et le lieu des centres se réduit à une hyperbole équilatère dont $\omega\zeta$ est une direction asymptotique.

Si l'on suppose les points de la droite D reliés par des tiges rigides aux points correspondants de l'hyperbole équilatère précédente, il est facile de voir que le système articulé ainsi constitué est susceptible de *deux mouvements algébriques distincts :* dans le premier, le point c restant sur l'axe $\omega\zeta$, le point b décrit une cartésienne plane dans le plan $\omega\zeta\eta$, et, dans le second déplacement du système, c'est le point b qui reste sur la droite $\omega\zeta$, tandis que le point c décrit une cartésienne plane dans le plan $\omega\eta\zeta$. On peut dire que, pour chacun de ces deux déplacements, le lieu des centres est une cubique gauche, constituée par l'hyperbole équilatère et par la droite à l'infini normale à la droite décrite.

Enfin, si, l'angle φ étant égal à π, le plan P est un plan de symétrie de (a), le point b décrit un cercle et le point c reste sur une droite normale au plan de ce cercle. Les centres des sphères passant par les trajectoires sont alors en ligne droite, et ce cas particulier peut se déduire du second théorème rappelé au n° 1.

14. Le déplacement de la droite D ne peut être engendré par le mode indiqué au n° **10**, que si k^2 est différent de 1. Supposons donc d'abord

$$k = -1.$$

Les propriétés du n° **9** s'appliquent à ce cas et se réduisent aux suivantes :

Soit, dans un sphéroïde, aa' une corde ayant pour longueur celle de l'axe de révolution, et dont les deux extrémités se trouvent sur deux parallèles égaux : si le point a décrit sur l'ellipsoïde une trajectoire sphérique, il en est de même de tous les points de la droite aa'.

On voit que le milieu b du segment aa' décrit une cartésienne plane.

On peut toujours choisir les axes de coordonnées de sorte que la courbe (a) ait pour équations

$$(\xi^2+\eta^2)\cos^2\omega+\zeta^2=1, \qquad \zeta^2+2A\xi+2B\zeta+C=0.$$

La cubique gauche Γ, lieu des centres des sphères sur lesquelles se déplacent les points de la droite mobile, est alors représentée par les équations

$$\xi=\frac{A\tang^2\omega(\rho+\tang^2\omega)}{\rho^2+\tang^2\omega}, \qquad \eta=\frac{A\tang^3\omega(1-\rho)}{\rho^2+\tang^2\omega}, \qquad \zeta=\frac{B\tang^2\omega}{\rho}.$$

On en tire des conclusions analogues à celles du n° **11**. La cubique Γ n'a qu'une asymptote réelle et est située sur un cylindre de révolution. Elle peut se décomposer en un cercle et une droite, si la trajectoire (a) est symétrique par rapport au plan équateur du sphéroïde considéré.

15. Il ne nous reste plus enfin à examiner que le cas où

$$k=1.$$

Or, on sait qu'on peut amener une figure (a) en coïncidence avec une figure directement égale (a') par une rotation autour d'un certain axe $\omega\zeta$, suivie d'une translation parallèle à cet axe. Le lieu des points a, tels que la droite aa' ait une longueur donnée, est alors un cylindre de révolution autour de $\omega\zeta$. Si le point a décrit sur ce cylindre une ligne sphérique, il en sera de même de tous les points de la droite aa'.

Il est évident que, dans ce cas, tous les points de la figure (a) supposée entraînée par le déplacement de la droite aa', l'axe $\omega\zeta$ tournant

et glissant sur lui-même, décrivent des trajectoires sphériques. Donc :

Si une figure se déplace de sorte qu'une certaine droite de cette figure tourne et glisse sur elle-même, il suffit qu'un point de la figure décrive une trajectoire sphérique, pour qu'il en soit de même de tous ses points.

Nous retrouvons ainsi un théorème déjà découvert par M. Raoul Bricard [1].

Il est facile de voir que, si la droite mobile est normale à l'axe $\omega\zeta$, les centres des sphères sur lesquelles se déplacent ses points sont situés aussi sur une droite normale à cet axe, et le produit des distances à cet axe d'un point et du centre correspondant est constant. Il en résulte que si l'on considère une figure plane dont le plan est normal à l'axe $\omega\zeta$, les points de cette figure se déplaceront sur des sphères dont les centres auront pour lieu une figure superposable à une transformée par inversion de la première, et l'on en déduit le théorème suivant [2] :

Étant données dans un même plan deux courbes (m) et (m') dont l'une s'obtient en faisant tourner autour d'un point ω une figure inverse de l'autre par rapport à ce point, si l'on joint par des tiges rigides articulées aux deux courbes les points homologues m et m', on obtient un système articulé déformable, dans lequel les plans des courbes (m) et (m') restent constamment parallèles.

Si l'on suppose fixe la courbe (m'), un des points du plan de la courbe (m) décrit la normale en ω au plan de (m').

On peut voir que le déplacement que nous venons d'étudier est le déplacement le plus général d'une figure dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques, de sorte que les centres correspondant aux points d'une droite soient les points d'une cubique gauche.

---

(1) R. Bricard, *Sur un déplacement remarquable* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 30 novembre 1896).

(2) Ce théorème a été généralisé par M. R. Bricard : *Sur le déplacement d'un plan dont les points décrivent des lignes sphériques* (*loc. cit.*, séance du 13 décembre 1897).

Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$;

PAR M. H. POINCARÉ.

I. — Introduction.

Considérons une équation différentielle linéaire de la forme suivante

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) admettra un certain nombre de points singuliers qui seront les infinis de la fonction rationnelle φ; pour chacun de ces points singuliers on pourra former l'équation déterminante.

Pour que x puisse être une fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un nombre entier. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Nous dirons que deux équations de la forme (1) appartiennent au même *type* :

1° Si la relation (2) est la même pour ces deux équations;

2° Si les infinis de la fonction φ sont les mêmes;

3° Si, pour chacun de ces infinis, les équations déterminantes sont les mêmes.

La question suivante se pose alors.

Dans un type quelconque (pourvu que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un entier), y a-t-il toujours une équation fuchsienne, c'est-à-dire telle que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales?

Cette question est d'une importance capitale dans la théorie des fonctions fuchsiennes; mais elle est extrêmement difficile; on voit assez aisément que, dans un type quelconque, il ne peut y avoir plus d'une équation fuchsienne; mais il est plus difficile d'établir qu'il y en a toujours une.

La première démonstration qui ait été donnée est fondée sur ce qu'on appelle la *méthode de continuité*. Nous y avons été conduits, M. Klein et moi, d'une façon indépendante. Dans mon Mémoire sur les *groupes des équations linéaires*, inséré dans le Tome III des *Acta mathematica*, j'ai insisté sur les ressemblances et les différences des résultats de M. Klein et des miens et j'ai donné en même temps un exposé complet de la méthode; je n'ai plus à y revenir. Je crois être arrivé à donner à cette méthode une forme parfaitement rigoureuse, mais elle n'en reste pas moins extrêmement compliquée et a un caractère indirect.

Peu de temps après, la Société royale des Sciences de Göttingen attira l'attention des géomètres sur une autre manière d'aborder la question, en proposant comme sujet de concours l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u.$$

L'intégration de cette équation conduirait en effet directement à la solution du problème qui nous occupe.

La question posée par la Société de Göttingen fut résolue par M. Picard dans un Mémoire inséré au *Journal de Jordan* (1890) et complété par une Note des *Comptes rendus* (Tome CXVI).

La solution proposée par M. Picard consiste à intégrer d'abord l'équation dans un contour assez petit et à étendre ensuite le résultat à un contour quelconque par la méthode alternée de M. Schwarz.

On peut revenir sur la question et chercher à se passer de ce détour. C'est ce que je me propose de faire ici.

Je me bornerai dans ce Mémoire aux fonctions fuchsiennes des première, deuxième et sixième familles, c'est-à-dire à celles qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Le polygone R_0 qui engendre la fonction fuchsienne est alors tout entier à l'intérieur de ce cercle; il a un certain nombre de sommets se répartissant en un certain nombre de cycles.

Mais parmi ces cycles nous distinguerons :

1° Ceux de la première espèce où la somme des angles est égale à 2π;

2° Ceux de la seconde espèce où la somme des angles est égale à $\frac{2\pi}{n}$, n étant un entier plus grand que 1;

3° Ceux de la troisième espèce dont tous les angles sont nuls.

Nous ferons une étude particulière des *fonctions fuchsiennes de la première espèce*, où tous les cycles des sommets sont de la première espèce; nous étendrons ensuite nos résultats aux autres fonctions fuchsiennes.

II. La fonction u.

Nous emploierons les notations suivantes :

Soient Z et Z′ deux variables complexes liées par une relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0, \tag{2}$$

correspondant à la relation (2) du paragraphe précédent. Soit

$$Z = X + iY, \qquad Z' = X' + iY'.$$

Considérons ensuite les quantités

$$Z_0 = X - iY, \qquad Z'_0 = X' - iY'$$

imaginaires conjuguées de Z et Z′. Elles seront évidemment liées par

une relation

$$(2\ bis) \qquad f_0(Z_0, Z'_0) = 0$$

où f_0 est un polynome dont les coefficients sont imaginaires conjugués de ceux de f.

Supposons maintenant que Z et Z′ soient des fonctions fuchsiennes

$$Z = \varphi(z), \qquad Z' = \varphi'(z)$$

de la variable complexe

$$z = x + iy.$$

Alors Z_0 et Z'_0 seront des fonctions fuchsiennes

$$Z_0 = \varphi_0(z_0), \qquad Z'_0 = \varphi'_0(z_0)$$

de la variable conjuguée

$$z_0 = x - iy.$$

Le cercle fondamental aura pour équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

ou bien

$$zz_0 = 1.$$

Cela posé, supposons que la variable Z décrive dans son plan un arc infiniment petit dS, et que la variable z décrive dans le sien l'arc infiniment petit correspondant. Soit ds la longueur de cet arc décrit par z, *longueur évaluée au point de vue de la géométrie non euclidienne*, c'est-à-dire ce que j'ai appelé la L de cet arc dans mes Mémoires du Tome I des *Acta mathematica*. On aura

$$dS = \sqrt{dZ\,dZ_0}; \qquad ds = \frac{\sqrt{dz\,dz_0}}{1 - zz_0}.$$

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une substitution du groupe fuchsien. Quand la variable z décrira l'arc

considéré dont la L est ds, la variable $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ décrira un arc dont la L sera encore ds; et la variable

$$\varphi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

qui sera encore égale à Z décrira un arc dont la longueur sera encore dS.

Le rapport

$$\frac{dS}{ds}$$

n'est donc pas altéré par les substitutions du groupe fuchsien; c'est donc une fonction uniforme de Z, Z', Z_0, Z'_0.

Posons alors

$$e^u = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

d'où

$$u = -\log\frac{dZ}{dz} - \log\frac{dZ_0}{dz_0} - 2\log(1 - zz_0).$$

Si l'on observe que Z est fonction seulement de z et Z_0 de z_0, on trouvera

$$\frac{d^2 u}{dZ\,dZ_0} = -2\frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}\frac{d^2\log(1 - zz_0)}{dz\,dz_0} = 2\frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

ou enfin

$$\frac{d^2 u}{dZ\,dZ_0} = 2e^u.$$

Si l'on passe des variables Z et Z_0 aux variables X et Y, on trouve

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{d^2 u}{dY^2} = 4\frac{d^2 u}{dZ\,dZ_0}$$

ou bien

$$(3) \qquad \Delta u = 8e^u.$$

Pour que la fonction u cesse d'être finie il faut que l'un des facteurs

$$\frac{dz}{dZ},\quad \frac{dz_0}{dZ_0},\quad 1 - zz_0$$

soit nul ou infini.

Le facteur $1 - zz_0$ ne peut jamais être infini; si la fonction fuchsienne est de la première famille, c'est-à-dire si le polygone R_0 n'a pas de cycle de la troisième espèce, le facteur $1 - zz_0$ ne peut pas non plus devenir nul, parce que le polygone R_0 n'a aucun point sur la circonférence du cercle fondamental.

Si, au contraire, le polygone R_0 a des cycles de sommets de la troisième espèce, le facteur $1 - zz_0$ ne peut devenir nul qu'en un sommet appartenant à l'un de ces cycles.

En dehors des sommets appartenant aux cycles de la troisième espèce, la fonction u ne peut donc cesser d'être finie que si l'un des facteurs

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}$$

est nul ou infini. Comme ces deux facteurs sont imaginaires conjugués, ils deviendront nuls et infinis en même temps.

La condition pour que u cesse d'être fini, c'est donc que

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dZ}{dz} = \infty.$$

On aura $\frac{dZ}{dz} = 0$ dans deux cas :

1° Aux sommets de R_0 qui appartiennent à un cycle de deuxième ou de troisième espèce; nous y reviendrons.

2° Si l'on a à la fois

$$f(Z, Z') = 0, \qquad \frac{df}{dZ} = 0,$$

c'est-à-dire si la tangente à la courbe $f(Z, Z') = 0$ est parallèle à l'axe des Z'.

Si le point correspondant n'est pas un point double de la courbe $f = 0$, on aura

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

mais on n'aura pas

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

ni, par conséquent,

$$\frac{dZ}{\partial z} = 0.$$

Si, alors, on pose

$$dS = \sqrt{dZ' dZ_0}$$

et

$$e^{u'} = \frac{ds^2}{dS^2},$$

c'est-à-dire si u' est la fonction qui joue, par rapport à Z', le même rôle que u par rapport à Z, cette nouvelle fonction u' ne deviendra pas infinie au point correspondant.

Supposons maintenant que le point considéré soit un point double de $f = 0$; on aura alors à la fois

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ'}{dz} = 0.$$

Mais posons

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

R étant une fonction rationnelle de Z et de Z'; nous pourrons choisir cette fonction R de telle façon que Z'' prenne des valeurs différentes au point double sur les deux branches de courbe qui s'y croisent.

Dans ces conditions, on n'aura pas

$$\frac{dZ''}{dz} = 0,$$

et, par conséquent, si u'' est la fonction qui joue par rapport à Z'' le même rôle que u par rapport à Z', u'' ne deviendra pas infinie au point correspondant.

On peut d'ailleurs toujours supposer que la courbe $f = 0$ ne présente d'autre singularité que des points doubles ordinaires. Si, au contraire, le point z était un sommet de R_0, appartenant à un cycle de deuxième ou de troisième espèce, toutes les dérivées

$$\frac{dZ}{dz}, \quad \frac{dZ'}{dz}, \quad \frac{dZ''}{dz}$$

seraient nulles à la fois et toutes les fonctions

$$u, \quad u', \quad u''$$

deviendraient infinies à la fois.

3° On aura

$$\frac{dZ}{dz} = \infty,$$

quand on aura

$$Z = \infty.$$

Mais si l'on pose

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

et si u'' est la fonction qui joue par rapport à Z'' le même rôle que u par rapport à Z, on aura

$$Z'' = 0,$$

et, par conséquent, on n'aura ni

$$\frac{dZ''}{dz} = 0,$$

ni

$$u'' = \infty.$$

En résumé, *si la fonction fuchsienne est de première espèce, c'est-à-dire s'il n'y a pas de cycles de deuxième et troisième espèces, les fonctions*

$$u, \quad u', \quad u'', \quad \ldots$$

ne peuvent devenir infinies à la fois.

Dans le cas général, ces fonctions ne pourront devenir infinies à la fois qu'aux différents sommets des divers cycles de deuxième et de troisième espèces.

Examinons maintenant ce qui arrive en un sommet d'un cycle de deuxième espèce.

Si la somme des angles du cycle est $\frac{2\pi}{n}$ et si a est un sommet de deuxième espèce et A la valeur correspondante de z, la fonction

fuchsienne

$$Z - A = \varphi(z) - A$$

sera développable suivant les puissances de $z - a$, et le développement commencera par un terme en $(z - a)^n$. Le développement de $\frac{dZ}{dz}$ commencera donc par un terme en $(z - a)^{n-1}$; il vient donc

$$\log(Z - A) = n \log(z - a) + Q,$$

$$\log \frac{dZ}{dz} = (n - 1) \log(z - a) + Q',$$

Q et Q′ restant finis pour $z = a$, et, par conséquent,

$$\log \frac{dZ}{dz} = \frac{n-1}{n} \log(Z - A) + Q'',$$

$$\log \frac{dZ_0}{dz_0} = \frac{n-1}{n} \log(Z_0 - A_0) + Q''_0,$$

et enfin

$$u = -\frac{2n-2}{n} \log|Z - A| + q,$$

Q'', Q''_0 et q restant finis pour $z = a$. J'ajoute que q est développable suivant les puissances de $Z - A$, $Z_0 - A_0$, $\sqrt[n]{(Z - A)(Z_0 - A_0)}$.

Passons aux sommets d'un cycle de troisième espèce; on aura alors dans le voisinage de ce cycle

$$\frac{1}{z - a} = \psi(Z) + b \log(Z - A),$$

b étant une constante et ψ une fonction développable suivant les puissances de $Z - A$. On tire de là

$$\frac{dz}{dZ} = -(z - a)^2 \left[\psi'(Z) + \frac{b}{Z - A}\right],$$

d'où

$$\log \frac{dZ}{dz} = \log(Z - A) - 2 \log(z - a) + Q,$$

Q désignant une quantité qui reste finie pour $z = a$.

On aurait, de même,

$$\log\frac{dZ_0}{dz_0} = \log(Z_0 - A_0) - 2\log(z_0 - a_0) + Q_0,$$

Q_0 restant fini pour $z = a$; comme le sommet a est sur le cercle fondamental, on a $aa_0 = 1$ et, par conséquent,

$$u = -2\log|Z - A| + 2\log\frac{(z-a)(z_0-a_0)}{(zz_0 - aa_0)} + q,$$

q restant fini pour $z = a$.

Observons maintenant que l'on a identiquement

$$\begin{aligned}\frac{zz_0 - aa_0}{(z-a)(z_0-a_0)} &= \frac{a}{z-a} + \frac{a_0}{z-a_0} + 1\\ &= ab\log(Z - A) + a_0 b_0 \log(Z_0 - A_0) + q,\end{aligned}$$

q restant fini pour $z = a$.

Mais il est aisé de vérifier que le produit ab doit être réel, de sorte que

$$ab = a_0 b_0$$

et

$$\frac{zz_0 - aa_0}{(z-a)(z_0-a_0)} = 2ab\log|Z - A| + q' = \log|Z - A|^{2ab} + q',$$

q' restant fini pour $z = a$.

Nous trouvons donc enfin

$$u = -2\log|Z - A| - 2\log\log|Z - A| - 2q' + q.$$

Plus précisément, nous aurons

$$u = -2\log|Z - A| - 2\log(\log|Z - A| + \psi) + \varphi,$$

ψ et φ étant holomorphes en $Z - A$ et $Z_0 - A_0$.

Ainsi donc :

1° Dans le voisinage d'un sommet de la deuxième espèce, la différence

$$u + \frac{2n-2}{n}\log|Z - A|$$

reste finie, ou plus exactement, toutes les différences

$$u + \frac{2n-2}{n}\log|Z - A|, \qquad u' + \frac{2n-2}{n}\log|Z' - A'|,$$
$$u'' + \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|$$

ne peuvent pas devenir infinies à la fois.

2° Dans le voisinage d'un sommet de la troisième espèce, toutes les différences

$$u + 2\log|Z - A| + 2\log\log|Z - A|,$$
$$u' + 2\log|Z' - A'| + 2\log\log|Z' - A'|,$$
$$u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|, \quad \ldots$$

ne peuvent pas devenir infinies à la fois.

Il importe de se rendre compte de la raison de cette différence entre les sommets de la deuxième et de la troisième espèce.

Soit $\rho^2 = x^2 + y^2$, et supposons, pour simplifier, que u soit fonction de ρ seulement; l'équation

$$\Delta u = 8e^u$$

peut alors s'écrire

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} = 8e^u.$$

Supposons que l'on veuille intégrer par approximations successives de la façon suivante; nous prendrons

$$\frac{d^2u_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_0}{d\rho} = 0,$$
$$\frac{d^2u_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_1}{d\rho} = 8e^{u_0},$$
$$\frac{d^2u_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_2}{d\rho} = 8(e^{u_0+u_1} - e^{u_0}),$$
$$\frac{d^2u_3}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_3}{d\rho} = 8(e^{u_0+u_1+u_2} - e^{u_0+u_1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Bornons-nous aux deux premières approximations; nous aurons, par exemple,

$$u_0 = p \log \rho, \qquad e^{u_0} = \rho^p,$$

$$u_1 = \frac{8\rho^{p+2}}{(p+2)^2}.$$

L'expression de u_1 devient illusoire pour $p = -2$, et l'on peut en conclure que l'équation (4) ne peut avoir d'intégrale de la forme

$$u = -2 \log \rho + c,$$

c restant fini pour $\rho = 0$; elle en a une, au contraire, de la forme

$$u = p \log \rho + c$$

si p n'est pas égal à -2.

En revanche, l'équation (4) admet pour intégrale

$$u = -2 \log \rho - 2 \log \log \rho - \log 4.$$

Je me contenterai de cet aperçu qui suffit pour faire comprendre la différence entre le cas des sommets de la deuxième espèce qui correspond à p différent de -2, et celui des sommets de la troisième espèce qui correspond à $p = -2$.

La variable z est le rapport des intégrales d'une certaine équation fuchsienne

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dZ^2} = \varphi(Z, Z')v$$

qui correspond à l'équation (1) du paragraphe précédent.

Si le « type » de cette équation est donné, on connaîtra :

1° La relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0;$$

2° Les valeurs A de Z qui correspondent aux divers cycles de sommets, soit de la seconde, soit de la troisième espèce;

3° Le nombre entier n relatif à chacun des sommets de la seconde espèce.

III. — Surfaces de Klein.

M. Klein a imaginé un mode de représentation des fonctions algébriques dont l'emploi peut nous être utile.

Considérons une courbe algébrique définie par l'équation

$$f(Z, Z') = 0. \tag{2}$$

On peut construire une surface fermée, et de telle façon qu'à tout point réel ou imaginaire de la courbe (2) corresponde un point réel de la surface et un seul. Cependant, à un point double de la courbe (2) correspondront deux points réels de la surface, appartenant respectivement aux deux branches de courbe qui se coupent au point double.

Nous supposerons, d'ailleurs, que les coordonnées du point de la surface sont des fonctions continues des coordonnées du point correspondant de la courbe, et même que ces fonctions continues ont des dérivées de tous les ordres.

Les surfaces de Riemann ne sont que des cas particuliers des surfaces de Klein; une surface de Klein se réduit à une surface de Riemann quand elle est infiniment aplatie et réduite à un certain nombre de feuillets appliqués sur un plan.

Mais nous devons faire une distinction et séparer les surfaces de Klein *isotropes* des surfaces de Klein *anisotropes*.

Une surface de Klein sera dite *isotrope* si le mode de correspondance entre les points de la courbe et ceux de cette surface est telle que la représentation du plan des Z sur la surface de Klein soit une *représentation conforme*. Aux différents points du plan des Z correspondent différents points de la courbe (2) et, par conséquent, différents points de la surface de Klein; cette correspondance définit une transformation d'une région du plan des Z dans une région de la surface de Klein; pour que la surface de Klein soit isotrope, il faut que cette transformation conserve les angles.

Nous pourrions ne nous servir que des surfaces isotropes: les travaux de MM. Schwarz et Klein permettent, en effet, d'affirmer que

les différents points d'une courbe algébrique quelconque peuvent toujours être représentés sur une surface de Klein isotrope.

Mais il est préférable de ne pas s'imposer cette restriction, ce qui ne compliquera pas beaucoup notre analyse; et, en effet, on sera dispensé de s'appuyer sur le théorème que je viens de citer et dont la démonstration est assez longue.

Au contraire, on peut pour ainsi dire regarder comme évident que, si l'on se donne une courbe (2) quelconque de genre p et une surface fermée quelconque $2p+1$ fois connexe, on peut faire correspondre d'une façon univoque les points de la courbe à ceux de la surface.

Ainsi l'on pourra faire correspondre d'une façon univoque les points réels d'une sphère et les points imaginaires d'une courbe unicursale quelconque; ou bien les points réels d'un tore et les points imaginaires d'une courbe de genre 1 quelconque.

Précisons la nature de la correspondance.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que la courbe (2) n'a d'autre singularité que des points doubles ordinaires et qu'elle se comporte régulièrement à l'infini, c'est-à-dire que ses directions asymptotiques sont toutes distinctes et non parallèles aux axes.

Cela posé, soit M un point de coordonnées courantes sur la surface, correspondant au point Z, Z′ de la courbe; soit P un point de la surface de Klein, correspondant au point

$$Z = A, \qquad Z' = A'$$

de la courbe.

Si la distance MP est très petite et si au point

$$Z = A, \qquad Z' = A'$$

on n'a pas

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

la distance MP est du même ordre de grandeur que $|Z - A|$.

Si, au contraire, on a

$$\frac{df}{dZ} = 0;$$

mais si l'on n'a pas

$$\frac{df}{dZ'} = 0,$$

la distance MP ne sera pas du même ordre de grandeur que $|Z - A|$: elle sera, en général, du même ordre de grandeur que le carré de $|Z - A|$ et en tout cas du même ordre de grandeur que $|Z' - A'|$.

Si l'on a à la fois

$$\frac{df}{dZ} = \frac{df}{dZ'} = 0,$$

c'est-à-dire si le point $Z = A$, $Z' = A'$ est un point double de la courbe (2), la distance MP ne sera plus du même ordre de grandeur que $|Z - A|$ ou que $|Z' - A'|$; mais nous pouvons poser

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

R étant une fonction rationnelle de Z et Z' dont le numérateur et le dénominateur s'annulent au point double.

Si A'' est l'une des deux valeurs que prend Z'' au point double et celle précisément qui correspond au point P, la distance MP est du même ordre de grandeur que $|Z'' - A''|$.

Si enfin le point P correspond à un point à l'infini de la courbe (2), la distance MP est du même ordre de grandeur que $\left|\frac{1}{Z}\right|$.

Considérons maintenant une fonction u des coordonnées du point M; le point M correspond à un point du plan des Z dont les coordonnées sont X et Y, parties réelle et imaginaire de Z. Alors u est aussi une fonction de X et Y.

Soient dS un arc infiniment petit dans le plan des Z et $d\sigma$ l'arc correspondant sur la surface de Klein; soient $d\Omega$ une aire infiniment petite dans le plan des Z et $d\omega$ l'aire correspondante sur la surface.

Par l'extrémité Z de l'arc dS, je mène un arc infiniment petit ZZ_1 normal à dS et dont la longueur sera dN.

Soit MM_1 l'arc infiniment petit de la surface de Klein correspondant à l'arc ZZ_1 et aboutissant, par conséquent, à l'extrémité M de l'arc $d\sigma$.

Supposons d'abord la surface de Klein isotrope; alors, si j'appelle dn la longueur de l'arc MM_1, l'arc MM_1 sera normal à $d\sigma$ et l'on aura

$$\frac{d\sigma}{dn} = \frac{dS}{dN}, \qquad \frac{d\omega}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{dS}\right)^2.$$

Soit u la valeur de la fonction u au point M, ou ce qui revient au même point Z et

$$u + \frac{du}{dn}\,dn = u + \frac{du}{dN}\,dN$$

sa valeur au point M_1 ou, ce qui revient au même, au point Z_1. On aura

$$\frac{du}{dn}\,d\sigma = \frac{du}{dN}\,dS.$$

Le théorème de Green, appliqué dans le plan des Z, nous donne

$$(3) \qquad \int \Delta u\,d\Omega = \int \frac{du}{dN}\,dS,$$

ou en considérant deux fonctions u et v,

$$(4) \qquad \int v\,\Delta u\,d\Omega = \int v\,\frac{du}{dN}\,dS - \int \left(\frac{du}{dX}\,\frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY}\,\frac{dv}{dY}\right) d\Omega.$$

Les intégrales sont étendues soit à tous les éléments $d\Omega$ d'une certaine aire plane, soit à tous les éléments dS du contour qui limite cette aire. Les fonctions u et v sont supposées continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Posons maintenant

$$Du = \Delta u\,\frac{d\Omega}{d\omega}$$

et

$$E(u, v) = \left(\frac{du}{dX}\,\frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY}\,\frac{dv}{dY}\right)\frac{d\Omega}{d\omega},$$

de telle sorte que

$$E(u, v) = E(v, u),$$
$$E(u, u) > 0.$$

Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$(3\,bis) \qquad \int Du\,d\omega = \int \frac{du}{dn}\,d\sigma,$$

$$(4\,bis) \qquad \int v\,Du\,d\omega = \int v\,\frac{du}{dn}\,d\sigma - \int E(u, v)\,d\omega.$$

Ces équations représentent le théorème de Green étendu à la surface de Klein; mais la première est susceptible d'une interprétation physique remarquable. Supposons que u représente la température d'un point de la surface; alors $\frac{du}{dn}$ représentera la dérivée de cette température estimée suivant la normale à l'arc $d\sigma$.

Si la surface est supposée conductrice et qu'elle soit homogène et isotrope au point de vue de la conductibilité calorifique, le produit

$$\frac{du}{dn} d\sigma$$

représentera le flux de chaleur qui traverse l'élément $d\sigma$ pendant l'unité de temps, pourvu que l'on choisisse convenablement les unités.

L'intégrale

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma$$

représente alors la quantité de chaleur qui entre dans l'aire $\int d\omega$ à travers son contour.

L'expression $Du\, d\omega$ représente donc la quantité de chaleur cédée à l'élément de surface $d\omega$ par les éléments voisins de la surface.

Supposons maintenant la surface de Klein anisotrope.

D'abord l'arc MM_1 ne sera plus normal à l'arc $d\sigma$.

Si l'on considère sur le plan des Z un cercle infiniment petit ayant pour centre le point Z, la figure correspondante sur la surface de Klein sera une ellipse infiniment petite, ayant pour centre le point M. Alors les tangentes à l'arc MM_1 et à l'arc $d\sigma$ seront deux diamètres conjugués de cette ellipse.

Nous n'aurons plus alors

$$\frac{MM_1}{dN} = \frac{d\sigma}{dS};$$

mais nous pourrons poser

$$du = \frac{d\sigma\, dN}{dS}$$

et nous aurons

$$MM_1 = \frac{a'\, dn}{b'},$$

a' et b' étant les longueurs des diamètres conjugués de notre ellipse qui sont dirigés respectivement suivant les tangentes à MM_1 et à $d\sigma$.

Ayant ainsi modifié la définition de dn, nous aurons

$$\frac{du}{dn}d\sigma = \frac{du}{dN}dS.$$

Nous conserverons les définitions de Du et de $E(u, v)$ et nous retomberons sur les équations (3 *bis*) et (4 *bis*).

L'interprétation physique subsiste; si, en effet, la surface est supposée conductrice, mais que la conductibilité ne soit pas isotrope, le flux de chaleur qui traverse l'élément $d\sigma$ sera encore représenté par le produit

$$\frac{du}{dn}d\sigma,$$

la définition de dn ayant été modifiée comme nous venons de le dire.

L'équation (3 *bis*) entraîne comme conséquence

$$\int Du\, d\omega = 0,$$

quand l'intégrale est étendue à la surface de Klein tout entière et, en effet, cette surface est fermée.

L'interprétation physique de cette équation est évidente : la conductibilité de la surface amène des échanges de chaleur entre ses diverses parties, mais ne peut altérer la quantité totale de chaleur que possède la surface entière.

IV. — La fonction Γ.

Nous considérons diverses quantités

$$Z, \quad Z', \quad Z''$$

toutes fonctions rationnelles de Z, Z', et les fonctions correspondantes

$$u, \quad u', \quad u'',$$

telles qu'elles ont été définies dans le § II.

Posons maintenant

$$e^U = e^u \frac{d\Omega}{d\omega}.$$

On en conclurait, si la surface de Klein était isotrope,

$$e^U = \frac{ds^2}{d\sigma^2}.$$

Dans tous les cas on aura également

$$e^U = e^{u'} \frac{d\Omega'}{d\omega},$$

l'aire $d\Omega'$ étant l'aire du plan des Z' qui correspond à l'aire $d\Omega$ du plan des Z; et, en effet, l'on a

$$e^u = \frac{ds^2}{dS^2}, \qquad e^{u'} = \frac{ds^2}{dS'^2}, \qquad \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{dS^2}{dS'^2}.$$

On aurait de même

$$e^U = e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

La définition de la fonction U est donc indépendante du choix de la fonction Z parmi les diverses fonctions

$$Z, \quad Z', \quad Z'', \quad \ldots.$$

Il vient alors

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8 e^u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8 e^U$$

et enfin

$$DU = 8 e^U + D \log \frac{d\Omega}{d\omega};$$

comme $D \log \frac{d\Omega}{d\omega}$ est une fonction connue que je puis poser égale à $-\Phi$, je puis écrire

$$(1) \qquad DU = 8 e^U - \Phi.$$

La définition de U ne dépendant pas du choix de Z, on devra avoir

$$-\Phi = \mathrm{D}\log\frac{d\Omega}{d\omega} = \mathrm{D}\log\frac{d\Omega'}{d\omega} = \mathrm{D}\log\frac{d\Omega''}{d\omega} = \ldots$$

et par conséquent

$$\mathrm{D}\log\frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0, \qquad \Delta\log\frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0,$$

ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

Je dis maintenant que la fonction Φ ne peut devenir infinie. En effet, elle ne peut cesser d'être finie que si $\log\frac{d\Omega}{d\omega}$ est infini, c'est-à-dire si

$$Z = \infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dZ} = 0.$$

Mais il faudrait en même temps que

$$\log\frac{d\Omega'}{d\omega} = \infty,$$

ce qui entraînerait

$$Z = \infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dZ} = 0.$$

Il n'y a donc de doute que pour les points de la surface de Klein qui correspondent aux points à l'infini ou aux points doubles de la courbe

$$(2) \qquad f(Z, Z') = 0.$$

Mais il faudrait encore que pour toutes les fonctions Z'' on eût

$$\log\frac{d\Omega'}{d\omega} = \infty.$$

Or c'est ce qui n'arrive pas, pour un point à l'infini, si l'on fait

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

ni pour un point double, si l'on fait

$$Z'' = \mathrm{R}(Z, Z').$$

le numérateur et le dénominateur de R s'annulant à la fois au point double.

La fonction Φ *est donc toujours finie.* C. Q. F. D.

Que dire maintenant de la fonction U.

Si on laisse de côté les points de la surface de Klein qui correspondent à un sommet de deuxième ou de troisième espèce du polygone R_0, on pourra trouver une fonction Z'' telle que

$$u'' \quad \text{et} \quad \log \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

soient finis. La fonction U est donc finie.

Si la fonction fuchsienne est de première espèce, la fonction U *sera donc finie sur toute la surface de Klein et elle sera définie par l'équation*

$$(1) \qquad DU = 8e^U - \Phi.$$

Supposons maintenant que a soit un sommet de deuxième espèce de R_0 et soient A, A', A'' les valeurs correspondantes de Z, Z et Z et P le point correspondant de la surface de Klein.

Nous pourrons supposer que l'on a choisi la fonction Z'' de telle sorte que

$$\log \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

reste fini; alors la différence

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|$$

et, par conséquent, la différence

$$U + \frac{2n-2}{n} \log MP$$

resteront finies.

Une observation cependant; lorsque Z'' tend vers A'', l'expression

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|$$

tend vers une limite finie et déterminée; mais quand le point M se rapproche de P, l'expression

$$U' + \frac{2n-2}{n} \log MP$$

(à moins que la surface de Klein ne soit isotrope) reste finie, mais ne tend pas vers une limite déterminée; sa limite dépend de la direction de la droite MP. Si ρ est le rayon d'un cercle très petit situé dans le plan des Z'' et ε le diamètre de l'ellipse correspondante de la surface de Klein dont la direction est la même que celle de MP, c'est l'expression

$$U' + \frac{2n-2}{2} \log \frac{\rho . MP}{\varepsilon}$$

qui tend vers une limite déterminée quand MP tend vers o.

Posons

$$v'' = u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|,$$

il viendra

$$\Delta v'' = \Delta u'' = 8 e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\Omega} = 8 e^{v''} |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}} \frac{d\Omega''}{d\Omega}.$$

On voit que la fonction v'' satisfait à une équation de la forme

$$\Delta v'' = \theta e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\Omega},$$

où θ est une fonction donnée, constamment positive, mais devenant infinie pour $Z'' = A''$.

Posons maintenant

$$e^{V} = e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Si nous conservons aux lettres θ et Φ leur signification

$$\theta = 8 |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}}; \qquad \Phi = -D \log \frac{d\Omega''}{d\omega},$$

il viendra

$$DV = \theta e^{V} - \Phi.$$

Au point P (correspondant au point $Z'' = A''$), la fonction θ deviendra infinie, mais V et Φ resteront finis.

Envisageons de même un sommet de la troisième espèce; nous choisirons u'' de telle façon que

$$u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|$$

reste fini et nous poserons

$$v'' = u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|,$$
$$\theta = 8|Z'' - A''|^{-2}\log^{-2}|Z'' - A''|.$$

Nous aurons alors

$$\Delta v'' = \Delta u'' + 2\Delta\log\log|Z'' - A''| = \frac{d\Omega''}{d\Omega}\left(8e^{u''} - \frac{2}{|Z'' - A''|^2\log^2|Z'' - A''|}\right),$$

et si nous posons encore

$$e^V = e^{v''}\frac{d\Omega''}{d\omega},$$

il viendra

$$DV = \theta e^V - \Phi - \frac{\theta}{4}\frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Nous sommes ainsi conduits à changer la définition de U. Nous poserons

$$U = u + \log\frac{d\Omega}{d\omega} + h,$$

où h est une fonction uniforme qui reste finie en tous les points de la surface de Klein, sauf aux points qui correspondent à des sommets de deuxième ou de troisième espèce de R_θ.

En un sommet de la deuxième espèce, la différence

$$h - \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|$$

devra rester finie; en un sommet de troisième espèce, la différence

$$h - 2\log|Z'' - A''| - 2\log\log|Z'' - A''|$$

devra rester finie.

Nous pourrons toujours choisir la fonction h de façon à satisfaire à ces conditions et même de telle façon que la fonction h en dehors des sommets de deuxième et de troisième espèce, et les fonctions

$$h - \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|; \quad h - 2\log|Z'' - A''| - 2\log\log|Z'' - A''|$$

dans le voisinage de ces sommets, que ces diverses fonctions, dis-je, aient leurs dérivées de tous les ordres finies et continues.

Dans ces conditions la fonction U *sera toujours finie et elle satisfera à l'équation*

$$DU = 8e^{U}e^{-h} + D\log\frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

ou en posant

$$\theta = 8e^{-h}, \qquad -\Phi = D\log\frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

à l'équation

$$(1\ bis) \qquad DU = \theta e^{U} - \Phi.$$

Les fonctions θ et Φ sont des fonctions *données;* la première est toujours positive, elle ne peut jamais s'annuler; elle ne peut devenir infinie qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèces; la fonction Φ ne peut devenir infinie qu'aux sommets de troisième espèce.

Aux sommets de deuxième espèce, θ devient infini comme

$$|Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}}.$$

Aux sommets de troisième espèce, θ et Φ deviennent infinies comme

$$(|Z'' - A''|\log|Z'' - A''|)^{-2}.$$

Le rapport

$$\frac{\Phi}{\theta}$$

reste donc fini; la limite de ce rapport est d'ailleurs égale à

$$\frac{1}{4}\frac{d\Omega''}{d\omega};$$

elle est donc positive.

Ainsi, s'il y a des sommets de troisième espèce, la fonction Φ peut devenir infinie, mais infinie positive; elle n'a donc plus de limite supérieure, mais *elle a toujours une limite inférieure*.

V. — Maxima et minima.

La propriété fondamentale de l'expression Du est la suivante : Si la fonction u est maxima, Du est négatif; si la fonction u est minima, Du est positif; ce qui signifie, au point de vue physique, qu'un point où la température est maximum peut céder de la chaleur aux points voisins, mais ne peut en recevoir.

Examinons la chose d'un peu plus près, et pour cela reprenons l'équation (3 *bis*) du paragraphe III

$$(3\ bis) \qquad \int Du\,d\omega = \int \frac{du}{dn}\,d\sigma.$$

Si au point P la fonction u est maximum, dans le voisinage de ce point, les courbes $u = \text{const.}$ seront de petites courbes fermées s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point P.

L'intégrale $\int \frac{du}{dn}\,d\sigma$, prise le long d'une de ces petites courbes, sera toujours négative, car $\frac{du}{dn}$ sera toujours négatif.

L'intégrale $\int Du\,d\omega$, étendue à l'aire limitée par une de ces petites courbes, sera donc négative.

Il faut donc qu'à l'intérieur de chacune de ces petites courbes u puisse prendre des valeurs négatives et, comme je puis supposer cette courbe aussi voisine du point P que je le veux, on pourra trouver, aussi près du point P qu'on le veut, des points où Du sera négatif.

Si la fonction Du est continue, elle ne pourra pas être positive en P; elle pourra s'annuler en P, mais à la condition qu'il y ait dans le voisinage de P des points où elle est négative. Il peut se faire que Du devienne infinie en P, mais toujours à la condition qu'il y ait dans le voisinage de P des points où elle soit négative.

Il convient toutefois de s'assurer que, si Du devient infini, l'intégrale

$$\int |\mathrm{D}u|\, d\omega$$

reste finie. C'est ce qui arrivera dans le problème qui nous occupe.

Nous avons vu que, aux sommets de la deuxième espèce, DU devient infini de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MP}^{2-\frac{2}{n}}}$$

et aux sommets de la troisième espèce, infini de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MP}^2 \log^2 \mathrm{MP}}.$$

L'intégrale

$$\int |\mathrm{DU}|\, d\omega$$

est du même ordre que

$$\int |\mathrm{DU}|\, \mathrm{MP}\, d(\mathrm{MP}),$$

c'est-à-dire que

$$\int \frac{d\mathrm{MP}}{\mathrm{MP}^{1-\frac{2}{n}}}, \qquad \int \frac{d\mathrm{MP}}{\mathrm{MP} \log^2 \mathrm{MP}},$$

et l'on vérifie aisément que ces deux intégrales sont finies.

Considérons alors l'équation

$$\mathrm{DU} = \theta e^{\mathrm{U}} - \Phi.$$

Je suppose que θ est toujours positif et ne peut s'annuler; je supposerai en outre que θ et Φ sont toujours finis (c'est ce qui arrive, comme nous l'avons vu, dans le cas des fonctions fuchsiennes de la première espèce).

Enfin, je supposerai d'abord que Φ est toujours positif et ne peut s'annuler.

Alors θ et Φ, ne pouvant ni s'annuler, ni devenir infinies, admettront chacune un minimum θ_0 et Φ_0 et chacune un maximum θ_1 et Φ_1; toutes ces quantités sont positives.

D'autre part U', étant fini, aura un maximum U_1 et un minimum U_0.

Pour le maximum, on aura

$$DU < 0$$

et, par conséquent,

$$\theta e^{U_1} - \Phi < 0,$$

ou *a fortiori*

$$\theta_0 e^{U_1} - \Phi_1 < 0.$$

Pour le minimum, on aura

$$DU > 0,$$

d'où

$$\theta e^{U_0} - \Phi > 0,$$

ou *a fortiori*

$$\theta_1 e^{U_0} - \Phi_0 > 0.$$

La fonction U satisfera donc toujours aux inégalités

$$(1) \qquad \log \Phi_0 - \log \theta_1 < U < \log \Phi_1 - \log \theta_0.$$

On peut obtenir des limites plus rapprochées en considérant le rapport $\frac{\Phi}{\theta}$; les inégalités

$$\theta e^{U_1} - \Phi < 0, \qquad \theta e^{U_0} - \Phi > 0$$

montrent que e^U reste toujours compris entre le minimum et le maximum de $\frac{\Phi}{\theta}$.

Ce résultat serait illusoire si Φ n'était pas toujours positif.

Supposons maintenant que Φ soit toujours positif, mais qu'on puisse trouver une fonction η, telle que

$$\Phi + D\eta$$

soit toujours positif.

Posons alors

$$U = V + \eta:$$

l'équation devient alors

$$DV = \theta e^{\eta} e^{V} - \Phi - D\eta.$$

Les fonctions θe^{η}, $\varphi + D\eta$ étant toujours finies et positives, les résultats précédents peuvent s'appliquer, et l'on voit que e^{V} reste toujours compris entre le maximum et le minimum de

$$\frac{\Phi + D\eta}{\theta e^{\eta}}.$$

Si donc η_0 et η_1 sont le minimum et le maximum de η, et si ζ_0 et ζ_1 sont le minimum et le maximum de

$$\frac{\Phi + D\eta}{\theta},$$

on aura

$$(2) \qquad \zeta_0 e^{\eta_0 - \eta_1} < e^{U} < \zeta_1 e^{\eta_1 - \eta_0}.$$

Si θ et Φ peuvent devenir infinis, les résultats précédents subsistent-ils? Dans les cas dont nous aurons à nous occuper, θ ne pourra devenir infini qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèces et Φ aux sommets de troisième espèce.

Dans tous les cas, l'expression

$$e^{U} - \frac{\Phi}{\theta}$$

restera finie et déterminée; cette expression devra être négative pour les maxima (sans quoi DU ne pourrait devenir négatif dans le voisinage du point correspondant au maximum) et positive pour les minima.

Si donc Φ est toujours positif, e^{U} sera toujours compris entre le maximum et le minimum de $\frac{\Phi}{\theta}$.

Si Φ n'est pas toujours positif, mais si $\Phi + D\eta$ est toujours positif, les inégalités (2) subsisteront.

Envisageons maintenant l'équation

$$(4) \qquad DV = \theta e^{U} V - \psi.$$

Soient V_1 et V_0 le maximum et le minimum de V; on devra avoir

$$\theta e^U V_1 - \psi < 0,$$
$$\theta e^U V_0 - \psi > 0,$$

ce qui montre que V reste compris entre le maximum et le minimum du rapport

$$\frac{\psi}{\theta e^U}.$$

Comme θe^U est essentiellement positif et ne peut s'annuler, ce résultat reste vrai, soit que ψ soit constamment positif, soit que ψ puisse changer de signe.

Il reste vrai encore et n'est pas illusoire, quand θ et même quand ψ peuvent devenir infinis pourvu que le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ demeure fini.

Je dis maintenant que l'équation (4) ne peut admettre deux solutions; si elle en admettait deux, V et V', la différence V — V' satisferait à l'équation

$$D(V - V') = \theta e^U (V - V').$$

Cette équation est de même forme que (4), mais ψ est nul. Sont donc également nulles la limite supérieure et la limite inférieure entre lesquelles peut varier V — V', d'après ce que nous venons de voir. Donc

$$V - V' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même, l'équation

$$DU = \theta e^U - \Phi$$

ne peut admettre deux solutions, car si elle en admettait deux, U et U + V, on aurait

$$DV = \theta e^U (e^V - 1).$$

Si V_1 et V_0 sont le maximum et le minimum de V, on devrait avoir

$$e^{V_1} \leqq 1, \qquad e^{V_0} \geqq 1,$$

d'où

$$V_1 \leqq 0, \qquad V_0 \geqq 0, \qquad V_1 \geqq V \geqq V_0.$$

ce qui entraîne

$$V_1 = V = V_0 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VI. — L'équation $Du = \varphi$.

Je me propose d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad Du = \varphi,$$

où u est la fonction inconnue qui doit être finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et la fonction φ qui est donnée. C'est comme si l'on demandait la température finale de chaque point de la surface, en supposant qu'elle ne cède pas de chaleur au dehors par rayonnement, mais que chaque élément $d\omega$ de la surface est le siège d'une source de chaleur produisant dans l'unité de temps une quantité de chaleur $-\varphi\, d\omega$.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que

$$(2) \qquad \int \varphi\, d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface entière. En effet, nous avons trouvé plus haut

$$\int Du\, d\omega = 0$$

et, d'ailleurs, l'équilibre thermique n'est évidemment possible que si la quantité *totale* de chaleur fournie par les sources est nulle.

Supposons cette condition remplie. Pour résoudre notre problème, nous allons introduire une fonction qui jouera le même rôle que la fonction de Green dans la théorie du potentiel.

Reprenons la courbe algébrique

$$(3) \qquad f(Z, Z') = 0,$$

qui est la même que la courbe (2) des paragraphes précédents.

Considérons l'intégrale abélienne

$$(4) \qquad J = \int R(Z, Z')\, dZ,$$

où R est une fonction rationnelle de Z et de Z'.

Soient alors

$$(Z = Z_0,\ Z' = Z'_0), \qquad (Z = Z_1,\ Z' = Z'_1),$$
$$(Z = U_0,\ Z' = U'_0), \qquad (Z = U_1,\ Z' = U'_1)$$

quatre points analytiques pris sur la courbe (3). Les deux premiers (Z_0, Z'_0), (Z_1, Z'_1) seront les limites inférieure et supérieure de l'intégrale (4).

Cette intégrale elle-même sera une intégrale abélienne de la troisième espèce admettant pour points singuliers logarithmiques les deux points analytiques (U_0, U'_0), (U_1, U'_1).

Donc, sauf aux points analytiques (U_0, U'_0), (U_1, U'_1), la fonction J sera holomorphe; dans le voisinage de (U_0, U'_0), la différence

$$J + \log(Z_1 - U_0) - \log(Z_0 - U_0)$$

et, dans le voisinage de (U_1, U'_1), la différence

$$J - \log(Z_1 - U_1) + \log(Z_0 - U_1)$$

seront holomorphes en Z_1 et Z_0.

Pour achever de définir l'intégrale (4), nous supposerons que les parties réelles de ses $2p$ périodes cycliques sont nulles.

L'intégrale J ne change pas quand on permute les deux points analytiques

$$(Z_0, Z'_0), \quad (Z_1, Z'_1)$$

avec les deux points analytiques

$$(U_0, U'_0), \quad (U_1, U'_1).$$

C'est le résultat bien connu dans la théorie des fonctions abéliennes sous le nom de *Vertauschung von Parameter und Argument*.

Je désignerai par M, P, M_1, P_1 les points de la surface de Klein qui correspondent aux quatre points analytiques

$$(Z_1, Z'_1), \quad (Z_0, Z'_0), \quad (U_1, U'_1), \quad (U_0, U'_0),$$

et par

$$G(M, P; M_1, P_1)$$

la partie réelle de l'intégrale J.

On voit que

$$G, \qquad G + \log\left|\frac{Z_1 - U_0}{Z_0 - U_0}\right|, \qquad G - \log\left|\frac{Z_1 - U_1}{Z_0 - U_1}\right|$$

seront des fonctions harmoniques de X et Y (si l'on pose $Z_1 = X + iY$), la première pour tous les points analytiques sauf pour U_0 et U_1, la seconde dans le voisinage de U_0, la troisième dans le voisinage de U_1.

Observons enfin que la définition précédente devrait être modifiée si l'un de nos quatre points analytiques venait en un point de la courbe (3) où

$$\frac{df}{dZ'} = 0, \qquad \frac{df}{dZ} = 0;$$

il conviendrait de remplacer alors par la fonction Z' la fonction Z qui joue le rôle prépondérant dans notre définition; ou bien encore si l'un des quatre points analytiques venait en un point double de la courbe (3); il faudrait remplacer Z par

$$Z'' = \frac{P(Z, Z')}{Q(Z, Z')},$$

P et Q étant deux polynomes entiers s'annulant tous deux au point double.

Soient $d\omega$ et $d\omega_1$ deux éléments quelconques de la surface de Klein; soient M et M_1 les centres de gravité de ces éléments; soient P et P_1 deux points *fixes* quelconques sur la surface de Klein. Soit φ_1 une fonction quelconque des coordonnées du point M_1.

Considérons l'intégrale

$$(5) \qquad v = \int G(M, P; M_1, P_1)\,\varphi_1\,d\omega_1,$$

étendue à tous les éléments $d\omega_1$ de la surface de Klein. C'est une fonction des coordonnées du point M.

Je dis d'abord que cette intégrale est finie, si la fonction φ_1 est finie elle-même. Et, en effet, la fonction G ne peut devenir infinie que si le point M_1 vient en M ou en P (elle s'annule si M se confond avec P et, par conséquent aussi, à cause de la Vertauschung, si M_1 se confond avec P_1); mais si M_1 vient en M ou en P la fonction G devient infinie logarithmiquement, de sorte que notre intégrale reste finie et déterminée.

Pour pousser l'étude plus loin, je divise la surface de Klein en deux régions, l'une S′ réduite à une petite calotte entourant le point M, l'autre S″ comprenant le reste de la surface et je pose

$$v = v' + v'',$$

v' et v'' représentant la même intégrale étendue respectivement à S′ et S″.

Je suppose que le point M ne se confond ni avec P ni avec P_1.

Considérons d'abord l'intégrale v''; si M_1 reste dans la région S″ qui ne contient pas le point M, les trois distances MM_1, MP, MP_1 restent finies et l'on peut assigner une limite supérieure à la fonction G et à chacune de ses dérivées.

L'intégrale

$$\int H \varphi_1 \, d\omega_1,$$

où H est une dérivée quelconque de G est non seulement finie, mais *uniformément* convergente. Nous pouvons donc appliquer le procédé de la différentiation sous le signe $\int$ et nous voyons d'abord que toutes les dérivées de v'' sont finies.

Il vient ensuite

$$Dv'' = \int DG \, \varphi_1 \, d\omega_1 = 0,$$

puisque

$$DG = 0.$$

Considérons maintenant v'; la portion S′ de la surface étant très

petite pourra être représentée d'une façon univoque sur le plan des Z et nous aurons

$$v' = \int G\, \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1,$$

$d\Omega_1$ étant l'aire de l'élément du plan des Z correspondant à l'élément $d\omega_1$ de la surface de Klein et l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\Omega_1$ de la portion du plan des Z qui correspond à la région S.

Mais on a

$$G = \log|Z_1 - U_1| + H,$$

H étant une fonction harmonique de X et de Y.

Nous aurons alors

$$v' = v'_1 + v'_2,$$

$$v'_1 = \int \log|Z_1 - U_1|\, \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1,$$

$$v'_2 = \int H\, \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1.$$

Nous voyons d'abord que l'on peut appliquer à l'intégrale v_2 le procédé de la différentiation sous le signe $\int$, de sorte que toutes les dérivées de v'_2 sont finies; d'ailleurs on a

$$\Delta v'_2 = \int \Delta H\, \varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1} d\Omega_1 = 0,$$

d'où

$$Dv'_2 = 0.$$

Ensuite les propriétés du potentiel logarithmique nous apprennent:

1° Que v'_1 est fini ainsi que ses dérivées des K premiers ordres, si φ_1 est fini ainsi que ses dérivées des $K - 1$ premiers ordres;

2° Que

$$\Delta v'_1 = -2\pi\varphi \frac{d\omega}{d\Omega},$$

φ et $\frac{d\omega}{d\Omega}$ représentant les valeurs que prennent φ_1 et $\frac{d\omega_1}{d\Omega_1}$ quand le

point M_1 vient en M. On en conclut

$$Dv'_1 = -2\pi\varphi.$$

En résumé, v est fini ainsi que ses dérivées des K premiers ordres si φ est fini ainsi que ses dérivées des $K-1$ premiers ordres, et l'on a

$$Dv = -2\pi\varphi.$$

J'ai supposé que M ne se confondait ni avec P, ni avec P_1.

Si M se confond avec P, G et v s'annulent.

Il me reste à faire voir qu'aucune singularité ne se présente quand M se confond avec P_1, et pour cela je vais montrer que l'intégrale v ne dépend pas de la position du point P_1.

Si nous remplaçons P_1 par un autre point P_2, v se change en

$$\int G(M, P : M_1, P_2)\varphi_1\, d\omega_1.$$

Puisque

$$G(M, P : M_1, P_1) = G(M, P ; M_1, P_2) - G(M, P ; P_1, P_2),$$

je vois que v a augmenté de

$$\int G(M, P ; P_1, P_2)\varphi_1\, d\omega_1 = G(M, P ; P_1, P_2)\int \varphi_1\, d\omega_1.$$

Or, cette expression est nulle à cause de la relation (2). Donc, v n'a pas changé. C. Q. F. D.

En résumé, la solution de l'équation (1) *nous est donnée par la formule*

$$(6) \qquad u = -\frac{1}{2\pi}\int G(M, P ; M_1, P_1)\varphi_1\, d\omega_1.$$

La solution donnée par l'équation (6) n'est pas unique; on peut évidemment y ajouter une constante arbitraire; à part cela, il n'y en a pas d'autre.

Ce qui caractérise la solution particulière (6), c'est qu'elle s'annule au point P.

La solution (6) satisfait à une inégalité qui nous sera utile dans la suite.

Soient η une fonction quelconque, toujours positive, et η_1 la valeur de cette fonction au point M_1. Soient

$$\varphi = \psi\eta, \qquad \varphi_1 = \psi_1\eta_1.$$

On aura évidemment

$$|u| < (\max. \text{de} |\psi|) \int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi}.$$

L'intégrale

$$\int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi}$$

est une fonction de M ; la fonction sous le signe $\int$ ne peut devenir infinie que dans trois cas : 1° si le point M vient en M_1 ; 2° si la fonction η_1 devient infinie ; 3° si le point M vient en P_1.

Afin d'exclure ce troisième cas, je décrirai autour de P_1 une petite courbe fermée et je supposerai que le point M ne pénètre pas à l'intérieur de cette courbe fermée.

Lorsque le point M est voisin de M_1, la fonction G devient infinie de l'ordre de $\log MM_1$; en outre, je supposerai que la fonction η_1 devient infinie en certains points A qui correspondront aux sommets de la deuxième espèce, et cela infinie de l'ordre de $M_1A^{\frac{2-2n}{n}}$; je suppose qu'il n'y ait pas de sommets de la troisième espèce et qu'en tous les autres points la fonction η_1 soit finie.

Alors l'intégrale

$$\int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi}$$

est finie et même converge uniformément. Et, en effet, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire si le point M coïncide avec un point A et si M_1 est très voisin de M, la fonction sous le signe $\int$ sera infinie de

l'ordre de

$$MM_1^{\frac{2-2n}{n}} \log MM_1,$$

et l'intégrale ne deviendra pas infinie. Nous pouvons donc assigner à cette intégrale une limite β' et écrire

$$(7) \qquad |u| < \beta'(\text{max. de } |\psi|).$$

Cette inégalité est vraie pourvu que M ne pénètre pas à l'intérieur de la courbe qui entoure le point P_1.

Mais nous avons vu que u ne dépend pas de la position du point P_1 et ne change pas quand P_1 vient en P_2; nous aurons donc

$$(7\ bis) \qquad |u| < \beta''(\text{max. de } |\psi|),$$

pourvu que M ne pénètre pas à l'intérieur d'une petite courbe entourant P_2.

Si, alors, β est le plus grand des deux nombres β' et β'', nous aurons

$$(8) \qquad |u| < \beta(\text{max. de } |\psi|),$$

quelle que soit la position du point M.

Ce résultat est vrai pourvu que la fonction η ne devienne jamais infinie que d'ordre $2 - \frac{2}{n} < 2$.

C'est une condition à laquelle satisfait la fonction θe^U quand il n'y a pas de sommet de troisième espèce.

VII. — L'équation $Du = \eta u - \varphi$.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad Du = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi.$$

Je supposerai la solution développable suivant les puissances de λ et je la mettrai sous la forme

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \ldots.$$

Les c_k sont des constantes et les u_k s'annulent au point P.

J'aurai la suite d'équations

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{D}u_0 = -\varphi, \\ \mathrm{D}u_1 = \eta(u_0 + c_0) - \psi, \\ \mathrm{D}u_2 = \eta(u_1 + c_1), \\ \mathrm{D}u_3 = \eta(u_2 + c_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Pour que la solution soit possible, nous devrons avoir

$$0 = \int \varphi\, d\omega = \int [\eta(u_0 + c_0) - \psi]\, d\omega = \int \eta(u_1 + c_1)\, d\omega = \dots,$$

ce qui nous donne la suite d'équations

$$(3)\quad \begin{cases} c_0 \int \eta\, d\omega = \int \psi\, d\omega - \int \eta u_0\, d\omega, \\ c_1 \int \eta\, d\omega = -\int \eta u_1\, d\omega, \\ c_2 \int \eta\, d\omega = -\int \eta u_2\, d\omega, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si ces conditions sont supposées remplies, la formule (6) du paragraphe précédent nous permettra de calculer $u_0, u_1, \dots$.

Ainsi, pourvu que l'on ait

$$\int \varphi\, d\omega = 0,$$

nous pourrons calculer successivement, par les équations (2) et (3), d'abord u_0, puis $c_0, u_1, c_1, u_2, c_2, \dots$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les maxima de $|u_1|, |u_2|, \dots$.

Si la fonction η est supposée toujours positive, on aura

$$|c_1| \int \eta\, d\omega < \int \eta\, |u_1|\, d\omega < \gamma_1 \int \eta\, d\omega.$$

d'où

$$|c_1| < \gamma_1,$$

et, de même,

$$|c_2| < \gamma_2, \quad |c_3| < \gamma_3, \quad \ldots.$$

L'inégalité (8) du paragraphe précédent nous donnera ensuite

$$\gamma_2 < \beta(\text{max. de } |u_1 + c_1|) < 2\beta\gamma_1$$

et, de même,

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \quad \gamma_1 < 2\beta\gamma_3, \quad \ldots.$$

La série

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

converge donc, pourvu que

$$2\beta\lambda < 1;$$

et par conséquent, à cette condition, la série

$$(4) \qquad \sum \lambda^k (u_k + c_k)$$

converge uniformément.

Si u est la somme de cette série, u sera donc une fonction finie et continue des coordonnées de M.

Nous aurons, d'autre part (puisque la série converge uniformément),

$$\int \eta u \, d\omega = \int \eta (u_0 + c_0) \, d\omega + \lambda \int \eta (u_1 + c_1) \, d\omega + \ldots = 0.$$

Nous pourrons alors, par la formule (6) du paragraphe précédent, trouver une fonction v qui satisfasse à l'équation

$$Dv = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi.$$

Je dis que cette fonction v est identique à u.

Posons, en effet,

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \ldots + \lambda^n (u_n + c_n) + R_n,$$
$$v = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \ldots + \lambda^{n+1} (u_{n+1} + c_{n+1}) + S_n;$$

il viendra

$$DS_n = \lambda\eta R_n.$$

La série (4) convergeant uniformément, nous aurons

$$|R_n| < K(2\lambda\beta)^n,$$

K étant une constante assignable : on conclut

$$|S_n| < K(2\lambda\beta)^{n+1}.$$

Quand n croît indéfiniment $(2\lambda\beta)^n$ et, par conséquent, $|R_n|$ et $|S_n|$ tendent vers zéro. La différence $u - v$ est égale à

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1}(u_{n+1} + v_{n+1}) < |R_n| + |S_n| + 2\lambda^{n+1}\gamma_{n+1}.$$

Elle tend donc vers zéro quand n croît indéfiniment et, comme elle ne dépend pas de n, elle est nulle. Donc $u = v$. Donc u satisfait à l'équation

$$Du = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration suppose que η, φ, ψ restent finis ou ne peuvent devenir infinis qu'en certains points (qui correspondraient aux sommets de la deuxième espèce) et *seulement infinis d'ordre* $2 - \frac{2}{n} < 2$.

Je terminerai par la remarque suivante :

Si, dans une certaine région de la surface de Klein, η, φ et ψ sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en sera de même de u.

Soit, en effet, $Dv = 0$, équation qu'on peut intégrer par la formule (6) du paragraphe précédent.

Nous avons vu que, si dans une certaine région θ est finie ainsi que ses dérivées des K premiers ordres, v sera finie ainsi que ses dérivées des $K + 1$ premiers ordres.

Appliquons ce résultat à l'équation

$$Du = \lambda\eta u - \lambda\varphi - \lambda\psi.$$

Comme u est fini, le second membre est fini ; donc u est fini ainsi

que ses dérivées du premier ordre; donc le second membre est fini ainsi que ses dérivées du premier ordre; donc u est fini ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et ainsi de suite... C. Q. F. D.

Supposons maintenant que l'on sache intégrer l'équation

$$(5) \qquad Du = \eta u - \varphi,$$

et proposons-nous d'intégrer

$$(6) \qquad Du = (\eta + \lambda \eta') u - \varphi.$$

Les deux fonctions η et η' sont supposées toujours positives.

Soit

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots;$$

l'équation (6) nous donnera la suite d'équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Du_0 = \eta u_0 - \varphi, \\ Du_1 = \eta u_1 + \eta' u_0, \\ Du_2 = \eta u_2 + \eta' u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les équations (7) étant de la forme (5), nous saurons les intégrer et elles nous donneront successivement $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Les principes du paragraphe V nous donnent les inégalités suivantes :

$$|u_0| < \text{max. de} \left| \frac{\varphi}{\eta} \right|,$$

$$|u_1| < \text{max. de} \left| \frac{\eta' u_0}{\eta} \right|,$$

$$|u_2| < \text{max. de} \left| \frac{\eta' u_1}{\eta} \right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient alors γ_k le maximum de $|u_k|$ et β celui de $\left|\frac{\eta'}{\eta}\right|$, il viendra

$$\gamma_1 < \beta\gamma_0, \quad \gamma_2 < \beta\gamma_1, \quad \ldots$$

Donc la série

$$(8) \qquad u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

converge uniformément pourvu que

$$|\lambda\beta| < 1.$$

J'ai supposé plus haut que nous savions intégrer l'équation (5); je précise cette hypothèse en disant que nous savons l'intégrer quelle que soit la fonction φ, pourvu que le rapport $\left|\frac{\varphi}{\eta}\right|$ soit limité. J'ai supposé aussi plus haut que le rapport $\left|\frac{\eta'}{\eta}\right|$ a une limite supérieure, et c'est cette limite supérieure que j'ai appelée β.

Soit alors u la somme de la série (8); cette somme est finie; nous savons alors intégrer l'équation

$$Dv = \eta v + \lambda \eta' u - \varphi,$$

puisque le rapport

$$\left|\frac{\lambda \eta' u - \varphi}{\eta}\right|$$

est limité.

Je dis que l'intégrale v de cette équation est précisément égale à u.

Soient, en effet,

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^n u_n + R_n,$$
$$v = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^{n+1} u_{n+1} + S_n,$$

on aura

$$DS_n = \eta S_n + \lambda \eta' R_n.$$

Or

$$|R_n| < K(\lambda\beta)^n, \qquad K \text{ étant une constante.}$$

Les principes du paragraphe V donnent ensuite

$$|S_n| < \text{max. de} \left|\frac{\lambda \eta' R_n}{\eta}\right| < K(\lambda\beta)^{n+1}.$$

Donc la différence

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1} u_{n+1}$$

tend vers zéro quand n tend vers l'∞; elle est donc nulle, et $u = v$.

C. Q. F. D.

On démontrerait ensuite comme plus haut que si, dans une certaine région, η, φ et η' sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en est de même de u.

Considérons maintenant l'équation

$$(9) \qquad Du = \eta u - \varphi,$$

et posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 1,$$
$$\varphi = \varphi_1 + \lambda_1 \psi_1.$$

Les λ sont des constantes positives; la fonction φ_1 est assujettie à la condition unique

$$\int \varphi_1 \, d\omega = 0,$$

mais elle est d'ailleurs arbitraire.

Nous allons intégrer successivement les équations

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Du = \lambda_1 \eta u - \varphi_1 - \lambda_1 \psi_1, \\ Du = \lambda_1 \eta u + \lambda_2 \eta u - \varphi, \\ Du = (\lambda_1 + \lambda_2) \eta u + \lambda_3 \eta u - \varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Du = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1}) \eta u + \lambda_p \eta u - \varphi. \end{array} \right.$$

La première équation (10) est de la forme (1); nous saurons donc l'intégrer, pourvu que

$$\lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

β étant la quantité qui figure dans l'inégalité (8) du paragraphe précédent.

Les autres équations (10) sont de la forme (6); on les rend identiques à l'équation (6) en changeant

$\lambda_1 \eta_1$ en η_1,	η_1 en η_1',	λ_2 en λ,	pour la 2e équation (10),
$(\lambda_1 - \lambda_2)\eta_1$ en η_1,	η_1 en η_1',	λ_3 en λ,	pour la 3e équation (10),
.....	.....	.....	.....
$(\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_{p-1})\eta_1$ en η_1;	η_1 en η_1',	λ_p en λ,	pour la $p^{\text{ième}}$ équation (10).

Nous saurons donc intégrer *successivement* ces équations (10), pourvu que

$$\lambda_2 < \frac{1}{\max \text{de } \frac{\eta_1}{\lambda_1 \eta_1}}, \qquad \lambda_3 < \frac{1}{\max \text{de } \frac{\eta_1}{(\lambda_1 + \lambda_2)\eta_1}}, \qquad \ldots$$

ou

$$\lambda_2 < \lambda_1, \qquad \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_p < \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1}.$$

Or, nous pouvons toujours satisfaire à ces conditions et aux relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 1, \qquad \lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

en choisissant l'entier p assez grand.

Donc nous saurons intégrer l'équation (9), *pourvu que :*

1° *Le rapport* $\left|\frac{\xi}{\eta_1}\right|$ *soit limité ;*

2° *Que* η_1 *soit toujours positif et ne s'annule pas ;*

3° *Que* η_1 *soit partout fini ou ne puisse devenir infini qu'en un nombre limité de points* (correspondant aux sommets de deuxième espèce) *et seulement d'ordre* $2 - \frac{2}{n} < 2$.

L'intégrale u est partout finie et continue.

Si, dans une certaine région, les fonctions données η_1 et ξ sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en sera de même de u.

VIII. — Extension aux sommets de troisième espèce.

Les résultats précédents s'appliquent, pourvu que la fonction η ne devienne infinie qu'en un nombre limité de points et seulement d'ordre $2 - \frac{2}{n} < 2$.

C'est la condition à laquelle satisfait la fonction θe^U, s'il n'y a pas de sommets de troisième espèce. Mais aux sommets de troisième espèce, cette fonction θe^U devient infinie de la même manière que

$$\frac{1}{x^2 \log^2 x}$$

devient infini pour $x = 0$.

Nous sommes donc conduits à examiner ce qui se passe quand, en certains points (sommets de troisième espèce), la fonction η devient infinie et cela de telle sorte que le produit

$$\eta \overline{\mathrm{MK}}^2 \log^2 \overline{\mathrm{MK}}$$

tende vers une limite finie et déterminée quand le point M se rapproche indéfiniment du sommet de troisième espèce K.

Dans ce cas, l'intégrale

$$\int \frac{G \mid \eta_1 d\omega_1}{2\pi},$$

considérée à la fin du paragraphe VI, n'est pas finie quand le point M vient en K; on ne peut donc pas lui assigner une limite supérieure β : on ne peut donc plus écrire l'inégalité (8) du paragraphe VI.

Si alors nous reprenons les équations (1), (2) et (3) du paragraphe VII, nous pouvons encore former les fonctions u_0, u_1, u_2, etc.: mais nous ne pouvons plus écrire les inégalités

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \qquad \gamma_4 < 2\beta\gamma_3, \qquad \ldots,$$

ni, par conséquent, affirmer que la série

$$S = \sum \lambda^h (u_h + c_h)$$

converge.

D'ailleurs, il est aisé de voir que

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

deviennent infinies au sommet de troisième espèce K et infinies respectivement du même ordre de grandeur que

$$\log\log MK, \quad \log^2\log MK, \quad \log^3\log MK, \quad \ldots.$$

Néanmoins, nous verrons plus tard que la série S converge en tous les points de la surface de Klein, sauf aux sommets de troisième espèce, et que la somme de cette série tend vers une limite finie et déterminée quand le point M se rapproche de l'un de ces sommets.

On pourrait dire, dans un langage abrégé mais peu correct, qu'aux sommets de troisième espèce la somme de la série est finie, bien que chacun des termes soit infini.

Un exemple simple fera mieux comprendre ma pensée.

Soit λ un nombre positif, et considérons la fonction x^λ; nous pouvons la développer suivant les puissances de λ et écrire

$$x^\lambda = 1 + \frac{\lambda \log x}{1} + \frac{\lambda^2 \log^2 x}{1.2} + \ldots + \frac{\lambda^n \log^n x}{1.2\ldots n}.$$

Chacun des termes devient infini pour $x = 0$, mais la somme de la série x^λ reste finie.

On pourra donc encore intégrer l'équation (1) du paragraphe VII.

Mais, pour établir toutes ces propositions, nous rencontrerons bien des difficultés. Ces mêmes difficultés, non encore surmontées, se retrouvent dans la méthode de M. Picard et dans toutes les méthodes d'approximations successives.

Pour en triompher, nous allons procéder par étapes.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul sommet de troisième espèce, que nous appellerons K, et proposons-nous d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad Du = \zeta\varphi.$$

Dans cette équation, ζ et φ sont deux fonctions données et la der-

nière est partout finie. Quant à ζ elle est partout positive et elle est finie, sauf au point K où elle est infinie comme

$$\frac{1}{MK^2 \log^3 MK},$$

aux sommets de deuxième espèce, s'il y en a, où elle devient infinie comme η et au point P_1 où elle pourra devenir infinie comme $\log MP_1$.

La solution de l'équation (1) nous sera donnée par la formule

$$u = \int \zeta_1 \varphi_1 G(M, K; M_1, P_1)\, d\omega_1,$$

analogue à la formule (6) du paragraphe VI.

Cela s'établirait par des raisonnements tout à fait analogues à ceux du paragraphe VI, mais qu'il est inutile de répéter ici.

Remarquons toutefois que la condition

$$\int \zeta \varphi\, d\omega = 0$$

n'est plus ici nécessaire puisque la fonction u peut devenir infinie pour $M = P_1$.

Cela posé, on a évidemment

$$|u| < \gamma \int \zeta_1 |G(M, K; M_1, P_1)|\, d\omega_1.$$

Étudions l'intégrale $\int \zeta_1 |G(M, K; M_1, P_1)|\, d\omega_1$.

C'est une fonction des coordonnées du point M qui ne peut présenter de singularité que quand le point M vient en K ou en P_1.

Qu'arrive-t-il d'abord quand M est voisin de K ? Partageons la surface de Klein en deux parties par une petite courbe fermée entourant le point K.

Nous aurons d'abord la région S extérieure à la petite courbe fermée ; la portion correspondante de l'intégrale sera très petite de l'ordre de MK.

Considérons maintenant la région S′ intérieure à cette petite courbe :

si les deux points M et M_1 sont dans cette région, G sera de même ordre de grandeur que

$$\log \frac{MM_1 . KP_1}{MP_1 . KM_1}$$

ou que

$$\log \frac{MM_1}{KM_1},$$

c'est-à-dire qu'on pourra trouver une quantité β telle que

$$\zeta_1 < \beta' \frac{1}{KM_1^2 |\log^3 KM_1|},$$

$$d\omega_1 < \beta'' KM_1 \, d(KM_1) \, d\varepsilon,$$

ε étant l'angle de KM_1 et de KM.

Si donc nous posons, pour abréger,

$$KM_1 = \rho, \qquad KM = r,$$

$$MM_1 = \delta = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varepsilon}, \qquad b = \beta\beta'\beta'',$$

notre intégrale sera plus petite que

$$b \int \left| \log \frac{\delta}{\rho} \right| \frac{d\rho \, d\varepsilon}{\rho \, |\log^3 \rho|}.$$

Nous supposerons que notre petite courbe fermée a pour équation

$$\rho = R,$$

c'est-à-dire qu'elle est l'intersection de la surface de Klein avec une sphère de rayon R ayant son centre en K.

L'intégrale doit alors être prise entre les limites o et 2π pour ε, o et R pour ρ; si l'on considère ρ et ε comme les coordonnées polaires d'un point dans un plan, point que nous appellerons encore M_1, l'intégrale à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, et dont le centre pourra être encore désigné par K.

De même nous regarderons r et o comme les coordonnées polaires d'un autre point que nous appellerons encore M; et la distance MM_1 de ces deux points, dans ce plan, sera encore égale à δ.

Nous partagerons alors la surface du cercle de rayon 1 en deux régions, l'une telle que

$$\delta > \rho, \quad MM_1 > KM_1, \quad \left|\log \frac{MM_1}{KM_1}\right| = \log \frac{MM_1}{KM_1},$$

l'autre telle que

$$\delta < \rho, \quad MM_1 < KM_1, \quad \left|\log \frac{MM_1}{KM_1}\right| = \log \frac{KM_1}{MM_1}.$$

Ces deux régions seront séparées l'une de l'autre par la droite π, perpendiculaire au milieu de MK.

L'intégrale, étendue à la première région, est plus grande que l'intégrale étendue à la seconde région.

En premier lieu, le champ d'intégration est plus grand; en second lieu, si nous envisageons deux points M_1 symétriques l'un de l'autre, par rapport à π, et situés, l'un dans la première région, l'autre dans la seconde, nous remarquerons que la valeur de

$$\frac{1}{\rho \log^3 \rho}$$

est plus grande pour le premier de ces points que pour le second, tandis que la valeur de

$$\left|\log \frac{\delta}{\rho}\right|$$

est la même pour les deux.

Notre intégrale est donc plus petite que

$$2b \int \left|\log \frac{\delta}{\rho}\right| \frac{dz\,dz}{\rho \log^3 \rho},$$

l'intégration étant étendue à la première région seulement. Mais dans cette région on a

$$\left|\log \frac{\delta}{\rho}\right| = \log \frac{\delta}{\rho} = \log \frac{MM_1}{KM_1} < \log \frac{KM_1 + MK}{KM_1}$$
$$= \log\left(1 + \frac{MK}{KM_1}\right) = \log\left(1 + \frac{r}{\rho}\right).$$

Donc notre intégrale est plus petite que

$$2b\int \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho\, d\varepsilon}{\rho\,|\log^3\rho|},$$

ou *a fortiori* plus petite que la même intégrale étendue au cercle de rayon R tout entier, c'est-à-dire que

$$4\pi b\int_0^{\mathrm{R}} \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho|}$$

Décomposons l'intégrale de la façon suivante

$$\int_0 = \int_0^r + \int_r^{\mathrm{R}_0} + \int_{\mathrm{R}_0}^{\mathrm{R}}.$$

La lettre R_0 désigne une quantité que nous déterminerons plus complètement plus tard, mais qui doit être $> r$.

Considérons d'abord la troisième intégrale prise de R_0 à R : entre ces limites on a

$$\log\left(1+\frac{r}{\rho}\right) < \frac{r}{\rho}.$$

L'intégrale est donc plus petite que

$$r\int \frac{d\rho}{\rho^2\,|\log^3\rho|} < r\int \frac{d\rho}{\rho^3} < \frac{r}{\mathrm{R}_0}.$$

Envisageons maintenant la seconde intégrale prise de r à R_0 : entre ces limites on a

$$r < \rho, \quad \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right) < \log 2,$$

et l'intégrale est plus petite que

$$\log 2\int \frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho|} = \frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{\log^2\mathrm{R}_0} - \frac{1}{\log^2 r}\right) < \frac{\log 2}{2\log^2\mathrm{R}_0}.$$

Venons enfin à la troisième intégrale prise de o à r ; entre ces limites

on a

$$\rho < r; \quad \log\left(1 + \frac{r}{\rho}\right) = \log\left(1 + \frac{\rho}{r}\right) + \log\frac{r}{\rho} < \log 2 + \log\frac{r}{\rho}.$$

L'intégrale est donc plus petite que

$$\log 2 \int \frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho|} + \int \log\frac{r}{\rho}\,\frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho|} = \frac{\log 2}{\log^2 r} + \frac{1}{2\,|\log r|}.$$

Notre intégrale est donc plus petite que

$$4\pi b\,\frac{r}{R_0} + 2\pi b \log 2\,\frac{1}{\log^2 R_0} + \frac{4\pi b \log 2}{\log^2 r} + \frac{2\pi b}{|\log r|},$$

et cela quel que soit R_0; en prenant, par exemple, $R_0 = \sqrt{r}$, on voit que notre intégrale est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{|\log r|} = \frac{1}{|\log MK|}.$$

Supposons maintenant M très voisin de P_1.

Nous pouvons trouver une quantité positive H telle que l'on ait constamment

$$|G| < |\log MM_1| + |\log MP_1| + \log|KM_1| + H,$$

et, en effet, si l'une des distances MM_1, MP_1, KM_1 est très petite (par exemple MM_1), G est égal à $\pm \log MM_1$ + une quantité finie.

Si deux de ces distances sont très petites, par exemple MP_1 et KM_1, nous pouvons ramener au cas précédent en introduisant un point auxiliaire K′ et écrivant

$$G(M, K; M_1, P_1) = G(M, K'; M_1, P_1) + G(K', K; M_1, P_1).$$

Pour chacune des fonctions G qui entrent dans le second membre, une seule des distances est très petite.

Or les intégrales

$$\int H\zeta_1\,d\omega_1 \quad \int |\log MM_1|\,\zeta_1\,d\omega_1, \quad \int \log|KM_1|\,\zeta_1\,d\omega_1$$

sont finies; l'intégrale

$$\int |\log MP_1| \, \zeta_1 \, d\omega_1 = |\log MP_1| \int \zeta_1 \, d\omega_1$$

est de l'ordre de $|\log MP_1|$.

D'où cette conséquence : l'intégrale

$$\int |G| \, \zeta_1 \, d\omega_1$$

est finie, sauf dans le voisinage du point K où elle est de l'ordre de $\frac{1}{|\log MK|}$ et dans le voisinage du point P_1 où elle est de l'ordre de $|\log MP_1|$.

Il existe donc une quantité b' telle que

$$\int |G| \, \zeta_1 \, d\omega_1 < b' \left| \frac{\log MP_1}{\log MK} \right|,$$

et, par conséquent, telle que

$$(3) \qquad |u| < \alpha_1 b' \left| \frac{\log MP_1}{\log MK} \right|$$

Si nous posons maintenant

$$\eta_1 u = \zeta \varrho'$$

et si nous observons qu'on peut trouver une quantité ε telle que

$$\frac{\eta_1}{\zeta} < \varepsilon \left| \frac{\log MK}{\log MP_1} \right|,$$

il viendra

$$(4) \qquad |\varrho'| < \alpha\gamma \qquad (\alpha = b'\varepsilon).$$

Soit donc γ' le maximum de $|\varrho'|$, nous pourrons trouver une quantité α ne dépendant que des points K et P_1 et telle que l'on ait toujours

$$(5) \qquad \gamma' < \alpha\gamma.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(6) \qquad Du = \lambda \eta u + \varphi$$

et proposons-nous de trouver une solution u de cette équation qui s'annule au point K et puisse devenir au point P_1 infinie comme $\log MP_1$.

Proposons-nous de développer cette solution suivant les puissances de λ et soit

$$(7) \qquad u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots.$$

Nous aurons, en introduisant une série de fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, la série d'équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \zeta\varphi_0 = \varphi; & Du_0 = \zeta\varphi_0; \\ \zeta\varphi_1 = \eta u_0; & Du_1 = \zeta\varphi_1; \\ \zeta\varphi_2 = \eta u_1; & Du_2 = \zeta\varphi_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

que l'on traitera comme l'équation (1).

Si alors $|\varphi_0|$ est limité et que γ_0 soit son maximum, si γ_k est le maximum de $|\varphi_k|$ on aura, en vertu des inégalités (5) et (3),

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1} < \alpha^k\gamma_0; \qquad |u_k| < \beta\delta\gamma_k MK\,|\log MP_1|.$$

La série (7) est donc convergente pourvu que

$$\lambda\alpha < 1$$

et elle nous fournit la solution de l'équation (6).

Si l'on avait eu

$$\int \zeta\varphi_0\, d\omega = \int \zeta\varphi_1\, d\omega = \ldots = \int \zeta\varphi_k\, d\omega = \ldots = 0,$$

les fonctions $u_0, u_1, \ldots$ auraient été indépendantes de la position du point P_1 ainsi que je l'ai expliqué dans le § VI; nous aurions donc pu

affirmer que ces fonctions, et par conséquent la fonction u, demeurent finies, même au point P_1. C'est le raisonnement de la fin du § VI.

Prenons maintenant l'équation

$$(8) \qquad Du = \lambda\eta u + \varphi + \mu\psi;$$

φ et ψ sont deux fonctions données; μ est une constante indéterminée que je supposerai développée suivant les puissances de λ,

$$\mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \lambda^2\mu_2 + \ldots,$$

et il s'agit de déterminer u et μ de façon que u soit partout fini et s'annule en K.

Je suppose que $\int\psi\, d\omega$ ne soit pas nul.

Nous avons la suite d'équations

$$\int\varphi\, d\omega + \mu_0\int\psi\, d\omega = 0; \qquad \zeta\varphi_0 = \varphi + \mu_0\psi; \qquad Du_0 = \zeta\varphi_0;$$

$$\int\eta u_0\, d\omega + \mu_1\int\psi\, d\omega = 0; \qquad \zeta\varphi_1 = \eta u_0 + \mu_1\psi; \qquad Du_1 = \zeta\varphi_1;$$

$$\int\eta u_1\, d\omega + \mu_2\int\psi\, d\omega = 0; \qquad \zeta\varphi_2 = \eta u_1 + \mu_2\psi; \qquad Du_2 = \zeta\varphi_2;$$

.....

que l'on traitera comme l'équation (1); les propriétés de l'équation (1) subsisteront, mais il y a plus; à cause de la relation

$$\int\zeta\varphi_k\, d\omega = 0,$$

la fonction u_k ne dépendra pas de la position du point P_1, de telle façon qu'en choisissant convenablement la constante b', l'inégalité (2) pourra être remplacée par la suivante

$$|u_k| < \frac{b'\gamma_k}{|\log MK|},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\int\eta u_k\, d\omega\right| < \varepsilon\gamma_k.$$

ε' étant une nouvelle constante, et enfin

$$|\mu_{k-1}| < \varepsilon'' \gamma_k,$$

en désignant par $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ la valeur de $\left|\int \psi\, d\omega\right|$.

Soit α' une quantité plus grande que le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$, nous avons

$$\zeta \varphi_k = \gamma_1 u_{k-1} + \mu_k \psi,$$

et nous pouvons trouver une quantité α ne dépendant que du point K, telle que

$$\frac{\gamma_1}{\zeta} = \alpha\, |\log \mathrm{MK}|.$$

Il viendra alors

$$\gamma_k < (\alpha + \alpha' \varepsilon'')\gamma_{k-1}.$$

La série (7) converge donc pourvu que

$$\lambda(\alpha + \alpha' \varepsilon'') < 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Énonçons le résultat obtenu.

On peut satisfaire à l'équation (8) *et cela de telle façon que u s'annule en* K *et soit toujours fini, pourvu que les rapports*

$$\frac{\varphi}{\zeta}, \frac{\psi}{\zeta}$$

soient limités.

Soit maintenant v une fonction définie de la façon suivante :

Traçons autour de K une petite courbe fermée, et soit A la valeur de Z qui correspond au sommet de deuxième espèce K.

A l'intérieur de la petite courbe, v sera égal à $\log\left|\frac{1}{Z - A}\right|$.

A l'extérieur v ne pourra s'annuler ni devenir infini.

Enfin partout, sauf au point K, v est fini ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres.

Soit h un exposant constant quelconque.

A l'intérieur de la petite courbe, on aura

$$\mathrm{D}v^h = \Delta v^h \frac{d\Omega}{d\omega}; \qquad \Delta v^h = \frac{h(h-1)}{|Z - A|^2} \log^{h-2}\left|\frac{1}{Z - A}\right|.$$

Faisons d'abord une hypothèse particulière sur η et supposons qu'à l'intérieur de la petite courbe η se réduise à

$$\frac{1}{|Z-A|^2 \log^2\left|\frac{1}{Z-A}\right|}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

J'appellerai η_0 cette fonction η particulière satisfaisant à cette condition.

Il est clair alors qu'on aura, à l'intérieur de la petite courbe,

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h$$

si l'on suppose

$$\lambda = h(h-1).$$

Je puis donc poser

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h + \psi,$$

ψ étant nul à l'intérieur de la petite courbe et restant fini à l'extérieur de cette courbe, sauf aux sommets de troisième espèce, où le rapport $\frac{\psi}{\eta_0}$ et, par conséquent, le rapport $\left|\frac{\psi}{\xi}\right|$ restent finis.

Supposons donc que l'on ait l'équation

$$(8\,bis) \qquad Du = \lambda'\eta_0 u + \varphi + \mu\psi,$$

où $\left|\frac{\varphi}{\xi}\right|$ est limité et où ψ est la fonction que nous venons de définir.

Dans cette équation, μ est une constante indéterminée de sorte que l'équation est de même forme que l'équation (8). Mais nous devons faire plusieurs remarques :

1° L'intégrale $\int\psi\,d\omega$ ne peut être nulle; on a, en effet,

$$\int\psi\,d\omega = -\lambda\int\eta_0 v^h\,d\omega,$$

et η_0 et v sont essentiellement positifs.

2° La fonction ψ dépend de λ; elle est même développable suivant les puissances de λ; en effet, on trouve aisément

$$Dv^h = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v, v).$$

On voit que h est développable suivant les puissances de λ, et qu'il en est de même de v^h *à l'extérieur de la petite courbe*, puisque dans cette région v ne devient ni nul ni infini : il en est donc aussi de même de Dv^h.

A l'intérieur de la petite courbe ψ est nul, et à l'extérieur

$$\psi = Dv^h - \lambda\eta_0 v^h$$

sera développable suivant les puissances de λ.

On pourra alors résoudre l'équation (8 *bis*) de telle façon que u s'annule au point K, pourvu que

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

Dans cette inégalité, α ne dépend que de la position du point K, elle ne dépend donc pas de λ; il en est de même de la quantité ε définie plus haut ; mais il n'en est pas de même de α' et de $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$.

En effet, α' doit être plus grand que le maximum de $\left|\frac{\psi}{\xi}\right|$ et $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ est égal à $\left|\int \psi\, d\omega\right|$.

Or nous avons

$$\psi = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v, v) - \lambda\eta_0 v^h.$$

A l'intérieur de la petite courbe ψ est nul: à l'extérieur $\frac{\eta_0}{\xi}$ est limité.

Nous avons

$$\lambda = h(h-1);$$

cette équation, considérée comme déterminant h, admet deux racines, l'une négative, l'autre positive (puisque nous supposons λ positif). Nous prendrons la racine négative; cette racine est plus petite que λ en valeur absolue.

Si alors v_0 est la plus petite valeur à l'extérieur de la petite courbe, on pourra trouver une constante A telle que

$$\left|\frac{\psi}{\xi}\right| < A\lambda v_0^h.$$

Si maintenant nous envisageons

$$\int \psi\, d\omega = -\lambda \int \eta_0 v^h\, d\omega,$$

nous voyons que cette expression est plus grande en valeur absolue que

$$\lambda \int \eta_0 v^h\, d\omega,$$

l'intégrale étant étendue, non plus à la surface de Klein tout entière, mais à l'extérieur de la petite courbe, et, en effet, les éléments de l'intégrale supprimés sont essentiellement positifs.

Si v_1 est la plus grande valeur de v à l'extérieur de la petite courbe, on aura, puisque h est négatif,

$$v^h > v_1^h,$$

et, par conséquent,

$$\lambda \int \eta_0 v^h\, d\omega > \lambda v_1^h \int \eta_0\, d\omega$$

ou

$$\left| \int \psi\, d\omega \right| > B \lambda v_1^h,$$

B étant une constante.

La condition à laquelle doit satisfaire $\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'}$ est

$$\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'} > \frac{A}{B} \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^h.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, on aura certainement

$$\alpha' > \text{max. de } \left| \frac{\psi}{\xi} \right|.$$

Nous supposerons

$$\lambda < \lambda_0,$$

λ_0 étant une constante et

$$\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{A}{B} \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{h_0},$$

où h_0 est la valeur de h qui correspond à λ_0 de telle sorte que

$$\lambda_0 = h_0 (h_0 - 1).$$

Alors la condition imposée à $\frac{\alpha'\varepsilon''}{\varepsilon'}$ sera bien remplie, *et cette quantité est devenue indépendante de* λ.

Alors on pourra satisfaire à l'équation (8 *bis*), pourvu que

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

Supposons donc que nous ayons à la fois

$$\lambda < \lambda_0, \qquad \lambda(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1, \qquad \lambda = \lambda',$$

et soit u' la solution de l'équation (8 *bis*); on aura, puisque nous supposons $\lambda = \lambda'$,

$$\mathrm{D}u' = \lambda\eta_0 u' + \varphi + \mu\psi,$$

et la valeur de μ ne sera pas infinie.

On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{D}v^h = \lambda\eta_0 v^h + \psi.$$

Si donc nous posons

$$u = u' - \mu v^h,$$

il viendra

$$\mathrm{D}u = \lambda\eta_0 u + \varphi. \tag{9}$$

D'ailleurs u ne devient pas infini au point K, mais, au contraire, s'y annule; car u' et v^h (l'exposant h étant négatif) s'y annulent l'un et l'autre.

On peut donc résoudre l'équation (9), pourvu que $\left|\frac{\varphi}{u}\right|$ soit limité.

Nous avons, il est vrai, fait une hypothèse toute particulière sur la fonction η, supposée égale à η_0; posons donc l'équation plus générale

$$\mathrm{D}u = \eta u + \varphi, \tag{10}$$

je dis qu'on saura également l'intégrer.

Posons, en effet,

$$\eta = \lambda\eta_0 + \eta',$$

en attribuant à λ une valeur assez petite pour qu'on ait

$$\lambda < \lambda_0, \qquad \lambda\alpha < 1,$$

et que, par conséquent, on puisse intégrer l'équation (9). Envisageons l'équation

$$(11) \qquad Du = (\lambda\eta_0 + \mu\eta_1')u + \zeta.$$

On peut assimiler cette équation à l'équation (6) du paragraphe précédent, l'équation (9) étant elle-même assimilée à l'équation (5) du même paragraphe.

Le rapport $\frac{\eta_1'}{\lambda\eta_0}$ est, d'ailleurs, limité.

On voit donc, par le raisonnement du paragraphe précédent, que l'on saura intégrer (11) pourvu que μ soit assez petit; et ensuite, en répétant le raisonnement appliqué à l'équation (9) à la fin du même paragraphe, que l'on sait encore intégrer (11), quelle que soit la valeur attribuée à μ, et en particulier pour $\mu = 1$.

On sait donc intégrer l'équation (10).

Le théorème une fois établi pour le cas où il n'y a qu'un sommet de troisième espèce, la méthode de M. Picard permettrait facilement de le généraliser quel que soit le nombre de ces sommets.

Mais je préfère arriver directement au résultat; je suivrai une voie peu différente de celle qui m'a servi dans le cas particulier traité d'abord et que je pourrais suivre encore, si je ne craignais de trop me répéter.

Je supposerai deux sommets de troisième espèce K et K_1.

La fonction η_1 sera partout positive; elle ne deviendra infinie qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèce; aux sommets de deuxième espèce, elle sera infinie de l'ordre $2 - \frac{2}{n}$; en K elle sera infinie de l'ordre

$$\frac{1}{\overline{MK}^2 \log^2 \overline{MK}},$$

et, de plus, développable suivant les puissances de MK et de $\left|\frac{1}{\log \overline{MK}}\right|$ et de même en K_1.

La fonction ζ sera partout positive et le rapport

$$\frac{\zeta \left| \log \overline{MK} \log \overline{MK_1} \right|}{\eta_1}$$

sera limité, de telle façon qu'au point K, par exemple, ζ sera de l'ordre de

$$\frac{1}{\overline{MK}^2 \log^3 \overline{MK}}.$$

On verrait alors, comme plus haut, qu'on peut trouver une constante b' telle que

$$\int \zeta_1 \, d\omega_1 \, |G(M, K;\ M_1, P_1)| < b' \left| \frac{\log MP_1}{\log MK} \right|,$$

$$\int \zeta_1 \, d\omega_1 \, |G(M, K_1; M_1, P_1)| < b' \left| \frac{\log MP_1}{\log MK_1} \right|.$$

Soit ensuite φ une fonction satisfaisant aux conditions

$$(12) \quad \int \zeta \varphi \, d\omega = 0; \quad \int \varphi_1 \zeta_1 G(K_1, K; M_1, P_1) \, d\omega_1 = 0 \qquad |\varphi| < \gamma,$$

et soit

$$u = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K; M_1, P_1) \, d\omega_1.$$

A cause des relations (12), on aura également

$$u = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K_1; M_1, P_1) \, d\omega_1$$
$$= \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K;\ M_1, P_2) \, d\omega_1 = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K_1; M_1, P_1) \, d\omega_1,$$

P_2 étant un autre point arbitraire de la surface de Klein. On pourra donc trouver une constante b' telle que l'on ait à la fois

$$|u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_1}{\log MK} \right|; \qquad |u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_1}{\log MK_1} \right|;$$

$$|u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_2}{\log MK} \right|; \qquad |u| < b'\gamma \left| \frac{\log MP_2}{\log MK_1} \right|.$$

En d'autres termes, u est fini même dans le voisinage de P_1 et de P_2 et très petit de l'ordre de $\frac{1}{|\log MK|}$, $\frac{1}{|\log MK_1|}$, dans le voisinage de K et K_1.

On aura donc, en choisissant convenablement la constante b'',

$$|u| < \frac{b''\gamma}{|\log MK . \log MK_1|}.$$

Posons

$$\eta u = \zeta \varphi';$$

soit γ' le maximum de $|\varphi'|$; et $\frac{\alpha}{b''}$ celui de $\frac{\eta}{\zeta|\log MK \log MK|}$. Nous aurons

$$\gamma' < \alpha\gamma \tag{13}$$

inégalité analogue à (5).

Cela posé, envisageons l'équation

$$Du = \lambda\eta u + \varphi + \mu\psi + \mu'\psi', \tag{14}$$

où φ, ψ, ψ' sont des fonctions données; μ et μ' des constantes indéterminées.

Peut-on l'intégrer de façon que u soit toujours fini?

Nous supposerons :

1° Que les rapports $\frac{\varphi}{\zeta}$, $\frac{\psi}{\zeta}$, $\frac{\psi'}{\zeta}$ sont limités;

2° Que les intégrales

$$\int \psi' d\omega, \quad \int \psi_1 G(K, K_1, M_1, P_1) d\omega_1$$

sont différentes de zéro;

J'écrirai, pour abréger, g au lieu de $G(K, K_1, M_1, P_1)$;

3° Que

$$\int \psi d\omega = \int \varphi d\omega = 0.$$

Nous supposerons u, μ et μ' développés suivant les puissances de λ.

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \ldots, \qquad \mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \ldots, \qquad \mu' = \mu'_0 + \lambda\mu'_1 + \ldots.$$

Nous aurons la suite d'équations

$$\mu'_0 = 0, \qquad \int \varphi_1 g\, d\omega_1 + \mu_0 \int \psi_1 g\, d\omega_1 = 0,$$

$$\varphi + \mu_0 \psi = \zeta \varphi_0, \qquad Du_0 = \zeta \varphi_0,$$

$$\int \eta u_0\, d\omega + \mu'_1 \int \psi' d\omega = 0, \qquad \eta u_0 + \mu'_1 \psi' = \varphi',$$

$$\int \varphi'_1 g\, d\omega_1 + \mu_1 \int \psi_1 g\, d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_0 + \mu_1 \psi + \mu'_1 \psi' = \zeta \varphi'_0, \qquad Du_1 = \zeta \varphi'_0,$$

$$\int \eta u_1\, d\omega + \mu'_2 \int \psi' d\omega = 0, \qquad \eta u_1 + \mu'_2 \psi' = \varphi'.$$

$$\int \varphi''_1 g\, d\omega_1 + \mu_2 \int \psi_1 g\, d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_1 + \mu_2 \psi + \mu'_2 \psi' = \zeta \varphi''_0, \qquad Du_2 = \zeta \varphi''_0.$$

. . . . . .

Bien entendu, $\psi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \ldots$ représentent les valeurs que prennent les fonctions $\psi, \varphi', \varphi'', \ldots$ quand le point M vient en M_1.

On voit que $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, \ldots$ n'ont aucun rapport avec $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \ldots$ ou avec $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$

Soient $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$, les maxima de $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, \ldots$.

J'aurai d'abord

$$|u_0| < \left| \frac{b'' \gamma_0}{\log MK . \log MK_1} \right|,$$

d'où je conclus que je puis trouver une constante c telle que

$$\left| \int \eta u_0\, d\omega \right| < c\gamma_0,$$

et comme $\int \psi' d\omega$ est une constante différente de zéro, je puis trouver une constante c' telle que

$$\mu'_1 < c' \gamma_0.$$

Si alors β et β' sont les maxima de

$$\frac{\eta b''}{\zeta |\log MK \log MK_1|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\psi'}{\zeta} \right|,$$

on aura

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right| < (\beta + c'\beta')\gamma_0.$$

Or l'intégrale $h = \int \zeta_1 g\, d\omega_1$ est une constante finie, et l'intégrale $h = \int \psi_1 g\, d\omega_1$ est une constante différente de zéro. On a donc

$$\left|\int \zeta'_1 g\, d\omega_1\right| < (\beta + c'\beta')\, h\, \gamma_0$$

et

$$|\mu_1| < (\beta + c'\beta')\frac{h}{h'}\gamma_0.$$

Or

$$\zeta'_0 = \frac{\zeta_1 u_0}{\zeta} + \mu_1\left|\frac{\psi}{\zeta}\right| + \mu'_1\left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|.$$

Si β'' est le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$, il viendra

$$|\zeta'_0| < \left[\beta + (\beta + c'\beta')\frac{h\beta''}{h'} + c'\beta'\right]\gamma_0$$

ou, en posant

$$\alpha = (\beta + c'\beta')\left(1 + \frac{h\beta''}{h'}\right),$$

$$\gamma_1 < \alpha\gamma_0;$$

on trouverait de même

$$\gamma_2 < \alpha\gamma_1,$$

ou, plus généralement,

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1}.$$

Nous voyons que la série

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

converge pour

$$\lambda\alpha < 1,$$

et comme

$$u_k| < \frac{b''\gamma_k}{|\log \mathrm{Mk}.\log \mathrm{Mk}_1|},$$

il en sera de même de la série

$$\sum \lambda_k u_k.$$

Traçons maintenant autour de K et de K_1 deux petites courbes fermées. Soit d'ailleurs v une fonction définie comme il suit.

Je désigne par A et A_1 les valeurs de Z correspondant aux deux points K et K_1.

A l'intérieur de la petite courbe entourant K, on aura

$$v = \log\left|\frac{1}{Z - A}\right|.$$

A l'intérieur de la seconde petite courbe, v est partout nul.

A l'extérieur des deux courbes, v ne peut s'annuler ni devenir infini. Enfin v est partout fini ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres.

Nous poserons ensuite

$$C\lambda = h(h-1);$$

C étant la valeur que prend $\eta\,|Z - A|^2 \log^2|Z - A|$ au point K et h étant la racine négative de cette équation du second degré; soit

$$Dv^h = \lambda\eta v^h + \theta.$$

Je dis que la fonction $\frac{\theta}{\xi}$ est limitée.

En effet, c'est seulement au point K que le rapport $\frac{\theta}{\xi}$ pourrait devenir infini.

Or, dans le voisinage du point K, la fonction η, par hypothèse, est développable suivant les puissances entières croissantes (positives ou négatives) de

$$(Z - A), \quad (Z_0 - A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\log\left|\frac{1}{Z - A}\right|};$$

il en est de même de

$$v^h \log^{-h}\left|\frac{1}{Z - A}\right|, \quad Dv^h \log^{-h}\left|\frac{1}{Z - A}\right|$$

et, par conséquent, de

$$\theta \log^{-h}\left|\frac{1}{Z - A}\right|.$$

Dans le développement de θ, les termes qui sont de l'ordre le plus

élevé, c'est-à-dire de l'ordre de

$$|Z - A|^{-2} \log^{-2+h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

se détruisent, et les termes de l'ordre immédiatement inférieur, c'est-à-dire de l'ordre de

$$|Z - A|^{-2} \log^{-3+h} \left| \frac{1}{Z - A} \right|,$$

seront très petits par rapport à ζ (puisque h est négatif); donc $\frac{\theta}{\zeta}$ reste fini. C. Q. F. D.

Soit maintenant v' une fonction engendrée comme v, mais de telle façon que le point K_1 joue le rôle du point K et inversement, c'est-à-dire que l'on ait à l'intérieur de la première petite courbe

$$v' = 0$$

et à l'intérieur de la seconde

$$v' = \log \frac{1}{|Z - A_1|}.$$

Soit C' la quantité qui joue, par rapport à K_1, le même rôle que C par rapport à K; soit enfin h' la racine négative de l'équation

$$C'\lambda = h'(h' - 1)$$

et posons

$$Dv'^{h'} = \lambda t_1 v'^{h'} + \theta';$$

nous verrons encore que $\frac{\theta'}{\zeta}$ est limité.

Soient maintenant ψ et ψ' deux combinaisons linéaires de θ et θ

$$\psi = a\theta + c\theta,$$
$$\psi' = b\theta + d\theta.$$

Je dis qu'on peut choisir les coefficients constants a, b, c, d de telle façon que

$$\int \psi \, d\omega = 0, \qquad \int \psi' \, d\omega \geq 0, \qquad \int \psi_1 \, g \, d\omega_1 \geq 0.$$

Pour que cela fût impossible, il faudrait en effet que l'on eût : ou bien

$$\int \theta\, d\omega = \int \theta'\, d\omega = 0$$

ou bien

$$\int \theta\, d\omega \int \theta'_1\, g\, d\omega_1 - \int \theta'\, d\omega \int \theta_1\, g\, d\omega_1 = 0.$$

Comme v et v' sont arbitraires sur une partie de la surface de Klein, on pourra toujours s'arranger de façon que cela n'ait pas lieu.

Seulement il importe de remarquer que ψ et ψ' dépendent de λ; le rapport entre le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$ et $\left|\int \psi_1\, g\, d\omega_1\right|$, et le rapport entre le maximum de $\left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|$ et $\left|\int \psi'\, d\omega\right|$ dépendent aussi de λ.

Il importe de rechercher si ces rapports ne deviennent pas infinis quand λ s'annule.

Cherchons donc les limites de $\frac{\theta}{\lambda}$ et $\frac{\theta'}{\lambda}$ pour $\lambda = 0$.

Pour cela nous nous servirons de la formule

$$Dv^h = hv^{h-1}\, Dv + h(h-1)v^{h-2}\, E(v, v).$$

Si l'on tient compte alors de

$$Dv^h = \lambda\eta_1 v^h + \theta; \qquad C\lambda = h(h-1),$$

il viendra, en divisant par λ et faisant tendre λ vers 0,

$$-C\frac{Dv}{v} + C\frac{E(v, v)}{v^2} = \eta_1 + \lim \frac{\theta}{\lambda}.$$

Si nous appelons θ_0 et θ'_0 les limites de $\frac{\theta}{\lambda}$ et $\frac{\theta'}{\lambda}$, nous voyons que les fonctions $\frac{\theta_0}{\zeta}$ et $\frac{\theta'_0}{\zeta}$ sont limitées; en effet, dans le voisinage des points K et K_1, Dv s'annule et la différence

$$C\frac{E(v, v)}{v^2} - \eta_1$$

est, au plus, de l'ordre de

$$\frac{1}{|Z-A|^2 \log^3 \left|\frac{1}{Z-A}\right|},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ζ.

D'autre part, comme v et v' sont arbitraires sur une partie de la surface de Klein, nous pourrons nous arranger pour que l'on n'ait pas

$$\int \theta_0 \, d\omega = \int \theta'_0 \, d\omega = 0,$$

$$\int \theta_0 \, d\omega \int \theta'_{0,1} g \, d\omega_1 - \int \theta'_0 \, d\omega \int \theta_{0,1} g \, d\omega_1 = 0,$$

c'est-à-dire que l'on peut s'arranger pour que les rapports dont il a été question plus haut ne deviennent pas infinis quand λ s'annule.

Formons alors l'équation

$$(15) \qquad Du = \lambda' \eta u + \varphi + \mu \psi + \mu' \psi'.$$

C'est l'équation (14), sauf qu'on a changé λ en λ': elle est donc intégrable pourvu que

$$\lambda' \alpha < 1.$$

La quantité α a été définie plus haut; elle est seulement assujettie à avoir une limite inférieure. Mais cette limite inférieure dépend de λ puisque ψ et ψ' dépendent de λ.

Toutefois, elle ne deviendra pas infinie pour $\lambda = 0$, puisqu'il en est ainsi des deux rapports dont il a été question plus haut.

Donc, si nous faisons varier λ de 0 à λ_0, cette limite inférieure restera plus petite qu'une certaine quantité β, et il suffira de prendre α indépendant de λ et plus grand que β, pour que nous puissions affirmer que notre équation (15) est intégrable toutes les fois que

$$\alpha \lambda' < 1.$$

Soit u_0 la solution de cette équation (15), et soit maintenant l'équation

$$(16) \qquad Du = \lambda \eta u + \varphi, \qquad \int \varphi \, d\omega = 0.$$

On résoudra cette équation en faisant

$$u = u_0 - \mu(av^h + cv'^{h'}) - \mu'(bv^h + dv'^{h'}),$$

en ayant soin de faire

$$\lambda' = \lambda,$$

et cela sera permis pourvu que

$$\lambda' = \lambda < \lambda_0, \qquad \lambda' = \lambda < \frac{1}{2}.$$

On remarquera quelques différences entre la démonstration que j'ai donnée dans le cas d'un seul sommet de troisième espèce et celle que j'ai donnée dans le cas de deux sommets.

Dans la première, j'ai employé un détour en me servant de la fonction auxiliaire η_0; dans la seconde, j'ai évité ce détour, mais j'ai dû supposer que η était d'une forme particulière, c'est-à-dire développable suivant les puissances croissantes de $Z - A$, $Z_0 - A_0$, $\frac{1}{\log|Z - A|}$. Cette condition est d'ailleurs remplie dans les applications que nous aurons à faire.

J'aurais pu tout aussi bien faire le contraire, mais j'ai voulu donner un exemple de deux procédés différents de démonstration.

Si l'équation (16) est intégrable pour $\int \zeta\, d\omega = 0$, elle le sera également quand cette condition ne sera pas remplie, car nous pouvons trouver une fonction v telle que

$$\int \eta v\, d\omega \gtrless 0.$$

Nous pouvons ensuite choisir la constante μ de telle sorte que

$$\mu \int (Dv - \lambda \eta v)\, d\omega = -\lambda\mu \int \eta v\, d\omega = \int \zeta\, d\omega.$$

Nous pourrons alors intégrer l'équation

$$(16) \qquad Du = \lambda \eta u + [\zeta - \mu(Dv - \lambda \eta v)].$$

qui satisfait à la condition

$$\int [\varphi - \mu(Dv - \lambda x_1 v)]\, d\omega = 0.$$

L'intégrale de (16) est alors égale à l'intégrale de (17) augmentée de μv.

En résumé, ce que nous avons dit au paragraphe précédent de l'équation (1) reste vrai quand il y a des sommets de troisième espèce; ce que nous avons dit dans ce même paragraphe des équations (5), (6) et (9) reste donc vrai également.

Nous pouvons nous résumer en disant que l'équation

$$Du = \eta u - \varphi \tag{17}$$

est susceptible d'être intégrée. Ce résultat n'est établi jusqu'ici qu'en supposant que le rapport $\frac{\varphi}{\xi}$ est limité.

Je dis maintenant qu'il sera vrai encore pourvu que le rapport $\frac{\varphi}{\eta}$ soit limité et partout bien déterminé.

Nous avons, en effet,

$$\frac{\varphi}{\xi} = \frac{\varphi}{\eta}\,\frac{\eta}{\xi}.$$

Le rapport $\frac{\eta}{\xi}$ est fini, sauf aux sommets de troisième espèce; nous n'avons donc qu'à examiner ce qui se passe dans le voisinage de l'un de ces sommets.

Nous avons supposé plus haut que, dans ce voisinage, η est développable suivant les puissances croissantes de

$$Z - A, \quad Z_0 - A_0, \quad \frac{1}{\log|Z - A|}.$$

Nous supposerons qu'il en est de même de φ.

Si, alors, nous appelons a la valeur du rapport $\frac{\varphi}{\eta}$ au sommet de troisième espèce K et que nous posions

$$\varphi = a\eta + \varphi_1,$$

le rapport $\frac{\varphi_1}{\xi}$ restera fini au point K.

Supposons donc, pour fixer les idées, deux sommets de troisième espèce K et K_1; soient a et a_1 les valeurs de $\frac{\varpi}{\eta}$ aux points K et K_1.

Soit v une fonction quelconque, finie et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres et prenant les valeurs a et a_1 aux points K et K_1; on aura

$$(18) \qquad D(u - v) = \eta(u - v) - (\varpi - \eta v + Dv).$$

Comme le rapport

$$\frac{\varpi - \eta v + Dv}{\zeta}$$

reste fini aux points K et K_1, on saura intégrer l'équation (18) et, par conséquent, l'équation (17).

IX. — Application du calcul des variations.

J'arrive à l'étude de l'équation

$$(1) \qquad DU = \theta e^U - \Phi$$

dont, nous l'avons vu, dépend le problème de la formation des fonctions fuchsiennes.

Mais, avant de démontrer par des procédés rigoureux l'intégrabilité de cette équation, je veux d'abord la faire pressentir par un de ces aperçus fondés sur le calcul des variations dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique.

Pour cela, je suppose d'abord que Φ soit toujours positif, et je donne à la fonction U un accroissement infiniment petit δU.

J'envisage l'intégrale

$$(2) \qquad \int \delta U \, d\omega (\theta e^U - \Phi - DU),$$

étendue à la surface de Klein tout entière.

L'intégration par parties donne

$$\int \delta U \, DU \, d\omega = - \int E(U, \delta U) \, d\omega,$$

de sorte que l'intégrale (2) devient

$$\int d\omega [(\theta e^{U} - \Phi)\,\delta U + E(U, \delta U)].$$

Or

$$(\theta e^{U} - \Phi)\,\delta U = \delta(\theta e^{U} - \Phi U); \qquad E(U, \delta U) = \frac{1}{2}\,\delta E(U, U).$$

Notre intégrale (2) n'est donc autre chose que la variation δJ, en posant

$$J = \int d\omega \left[\frac{1}{2} E(U, U) + \theta e^{U} - \Phi U\right].$$

La variation δJ ne peut donc s'annuler sans que l'équation (1) soit satisfaite.

L'intégrale J admet-elle un minimum? $E(U, U)$ est essentiellement positif: quant à l'expression

$$\theta e^{U} - \Phi U,$$

elle atteint son minimum pour

$$\theta e^{U} = \Phi,$$

équation à laquelle on peut satisfaire, puisque Φ et θ sont toujours positifs.

Le minimum atteint est

$$\Phi\left(1 - \log\frac{\Phi}{\theta}\right).$$

Donc on a toujours

$$J > \int d\omega\, \Phi\left(1 - \log\frac{\Phi}{\theta}\right).$$

Donc J a un minimum.

Donc on peut satisfaire à l'équation (1).

Supposons maintenant que Φ ne soit plus toujours positif, et soit Φ_0 la valeur moyenne de Φ, de telle façon que

$$\Phi_0 \int d\omega = \int \Phi\, d\omega.$$

Nous pourrons poser alors

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

et l'on aura

$$\int \Phi_1 \, d\omega = 0.$$

Je dis qu'on peut satisfaire à l'équation (1), pourvu que Φ_0 soit positif.

En effet, puisqu'on a

$$\int \Phi_1 \, d\omega = 0,$$

on peut trouver une fonction u telle que

$$Du = -\Phi_1.$$

Posons alors

$$U = V + v;$$

l'équation (1) devient

$$(1\ bis) \qquad DV = \theta e^v e^V - \Phi_0.$$

On pourra résoudre l'équation (1 *bis*) qui est de même forme que (1), car θe^v est toujours positif et Φ_0 est une constante positive.

Peut-on maintenant résoudre l'équation (1) quand

$$\int \Phi \, d\omega < 0?$$

Non; en effet, on a

$$\int DU \, d\omega = 0$$

et, par conséquent,

$$\int \Phi \, d\omega = \int \theta e^U \, d\omega > 0.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse résoudre l'équation (1), c'est que

$$\int \Phi \, d\omega > 0.$$

X. — L'équation $DU = \theta e^U - \Phi$.

Nous allons maintenant donner de ce résultat une démonstration rigoureuse.

Envisageons d'abord l'équation

$$(1) \qquad Du = \theta e^u - \varphi;$$

supposons qu'on sache l'intégrer et qu'elle admette comme intégrale

$$u = u_0.$$

Envisageons ensuite l'équation

$$(2) \qquad Du = \theta e^u - \varphi - \lambda \psi.$$

Je me propose de chercher à quelles conditions cette nouvelle équation sera intégrable.

Pour cela, je suppose u développé suivant les puissances de λ et j'écris

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots.$$

Alors e^{u-u_0} sera également développable suivant les puissances de λ, et je pourrai écrire

$$e^{u-u_0} = 1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \ldots,$$
$$+ \lambda^2 w_2 + \lambda^3 w_3 + \ldots.$$

J'aurai évidemment

$$w_2 = \frac{u_1^2}{2}, \qquad w_3 = \frac{u_1^3}{6} + u_1 u_2,$$

$$w_4 = \frac{u_1^4}{24} + u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_1^2 u_2}{2}, \quad \ldots.$$

En général, *les w seront des polynomes entiers par rapport aux u_k et les coefficients de ces polynomes seront tous positifs.*

Alors u_0, u_1, ... nous seront donnés successivement par les équa-

tions

$$(1) \qquad Du_0 = \theta e^{u_0} - \varphi,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} Du_1 = \theta e^{u_0} u_1 - \psi, \\ Du_2 = \theta e^{u_0}(u_2 + w_2), \\ Du_3 = \theta e^{u_0}(u_3 + w_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous avons supposé qu'on savait intégrer l'équation (1). D'autre part, d'après les paragraphes VII et VIII, on sait intégrer les équations (3).

Dans la première équation (3), θ, u_0 et ψ sont connues, et u_1 est la fonction inconnue; dans la seconde, θ, u_0 et w_2 sont connues et u_2 est la fonction inconnue et ainsi de suite.

Voyons maintenant à quelles inégalités satisfont les fonctions u_k ainsi formées.

Quand u_2 atteint son maximum, Du_2 doit être négatif; donc

$$u_2 < -w_2.$$

Au contraire, quand u_2 atteint son minimum, on doit avoir

$$u_2 > -w_2.$$

Donc le maximum de u_2 est plus petit que celui de $(-w_2)$ et le minimum de u_2 plus grand que celui de $(-w_2)$.

Donc le maximum de $|u_2|$ est plus petit que celui de $|w_2|$.

On verrait de même que le maximum de $|u_3|$ est plus petit que celui de $|w_3|$ et, en général, que le maximum de $|u_k|$ est plus petit que celui de $|w_k|$.

Pour la même raison, le maximum de $|u_1|$ est plus petit que celui de

$$\frac{|\psi|}{\theta e^{u_0}}.$$

(Rappelons que θ et e^{u_0} sont essentiellement positifs).

Donc

$$\max \text{ de } |u_1| < \frac{\max \left| \frac{\psi}{\theta} \right|}{\min e^{u_0}}.$$

Mais u_0 satisfait à l'équation

$$Du_0 = \theta e^{u_0} - \varphi.$$

Quand u_0 atteint son minimum, on doit donc avoir

$$\theta e^{u_0} - \varphi > 0$$

et, par conséquent, si φ est toujours positif,

$$\min \text{ de } e^{u_0} > \min \left| \frac{\varphi}{\theta} \right|;$$

d'où enfin

$$\max |u_1| < \frac{\max \left| \frac{\psi}{\theta} \right|}{\min \left| \frac{\varphi}{\theta} \right|}.$$

Soit $u'_1, u'_2, \ldots, u'_k, \ldots$ une suite de constantes positives, soit w_k un polynome formé avec les u'_j comme w_k l'est avec les u_j.

Comme les polynomes w_k ont tous leurs coefficients positifs, si l'on suppose

$$u'_1 > \max |u_1|, \qquad u'_2 > \max |u_2|, \qquad \ldots, \qquad u'_{k-1} > \max |u_{k-1}|,$$

on aura

$$w'_k > \max |w_k|,$$

et si l'on suppose

$$u'_k = w'_k,$$

on aura

$$u_k > \max |w_k| > \max |u_k|.$$

de sorte que, de proche en proche, on aura

$$(4) \qquad u'_k = w'_k, \qquad w'_k > \max |w_k|, \qquad u_k > \max |u_k|.$$

Posons maintenant

$$(5) \qquad v = \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots;$$

il viendra, d'après la définition des polynomes w et w',

$$e^v = 1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \lambda^3 u'_3 + \ldots$$
$$+ \lambda^2 w'_2 + \lambda^3 w'_3 + \ldots$$

ou, à cause de l'égalité $u'_k = w'_k$,

$$(6) \qquad e^v = 2v + 1 - \lambda u'_1.$$

Comme u'_1 n'est assujetti qu'à être plus grand que le maximum de u_1, je prendrai

$$u'_1 = \frac{\max\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|}{\min\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|}.$$

De l'équation (6), je tirerai v en série ordonnée suivant les puissances de λ, et la limite de convergence de cette série correspondra à la valeur de λ pour laquelle l'équation (6) a une racine double.

Or, en différentiant l'équation (6), je trouve

$$e^v = 2, \qquad v = \log 2,$$
$$\lambda u_1 = \log 4 - 1.$$

Donc, *la série* (5) *converge, pourvu que*

$$|\lambda u_1| < \log 4 - 1.$$

Donc, en vertu des inégalités (4),

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

converge absolument et uniformément.

Il en est de même de la série

$$e^u = e^{u_0}(1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots + \lambda^2 w_2 + \ldots).$$

En effet, les termes de cette série sont respectivement plus petits que ceux de la série convergente (à termes positifs et constants)

$$e^{v+u_0} = e^{u_0}(1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots + \lambda^2 w'_2 + \ldots).$$

Formons donc les deux séries

$$\theta e^u - \varphi - \lambda\psi = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \ldots$$

et

$$\int V'_0 G\, d\omega_1 + \lambda \int V'_1 G\, d\omega_1 + \lambda^2 \int V'_2 G\, d\omega_1 + \ldots,$$

où j'ai écrit, pour abréger, G, au lieu de

$$G(M, P; M_1, P_1),$$

et où V'_k est la valeur de la fonction V_k au point M_1.

La première de ces séries sera uniformément convergente, de sorte que la seconde représentera l'intégrale

$$J = \int (\theta e^u - \varphi - \lambda\psi)_1 G\, d\omega_1,$$

où

$$(\theta e^u - \varphi - \lambda\psi)_1$$

représente la valeur au point M_1 de la fonction

$$\theta e^u - \varphi - \lambda\psi.$$

On a donc

$$DJ = \theta e^u - \varphi - \lambda\psi.$$

D'autre part, on a

$$D\int V'_0 G\, d\omega_1 = V_0 = \theta e^{u_0} - \varphi,$$

$$D\int V'_1 G\, d\omega_1 = V_1 = \theta e^{u_0} u_1 - \psi,$$

$$D\int V'_2 G\, d\omega_1 = V_2 = \theta e^{u_0}(u_2 + w_2).$$

. . . . . .

En résumé, si nous posons, pour abréger,

$$\int V_k^1 G \, d\omega_1 = v_k,$$

on aura

$$Du_k = Dv_k$$

et, par conséquent,

$$u_k = v_k + C_k,$$

C_k étant une constante. Les deux séries

$$u = \sum \lambda^k u_k \qquad \text{et} \qquad \sum \lambda^k v_k = J$$

sont convergentes et la convergence est uniforme, pourvu que M reste en dehors d'une petite courbe entourant le point P_1.

Soit donc u la somme de la première série et J celle de la deuxième; soit c celle de la série $\sum \lambda^k C_k$, on aura

$$C = J + c$$

et, par conséquent,

$$Du = DJ = \theta e^u - \varphi - \lambda \psi.$$

Notre équation est donc satisfaite.

Cela suppose que φ est toujours positif et que les rapports $\frac{\varphi}{\theta}$ et $\frac{\psi}{\theta}$ sont limités et partout bien déterminés.

L'équation

$$(7) \qquad Du = \theta e^u - \alpha \theta$$

admet-elle une solution quelle que soit la constante positive α?

Oui, car elle admet pour intégrale

$$u = \log \alpha.$$

Soit maintenant l'équation

$$(8) \qquad Du = \theta e^u - \alpha \theta - \mu \psi,$$

où ψ est une fonction toujours positive et telle que $\frac{\psi}{\theta}$ soit limité.

Est-elle toujours intégrable quelles que soient les constantes positives α et μ?

Changeons μ en $\mu + \lambda$, l'équation devient

$$(8\ bis) \qquad Du = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi - \lambda\psi,$$

qui se ramène à la forme (2) en posant

$$\varphi = \alpha\theta + \mu\psi.$$

Comme $\mu\psi$ est essentiellement positif, nous avons

$$\min \text{ de } \left|\frac{\varphi}{\theta}\right| > \alpha.$$

Si donc l'équation (8) est intégrable, il en sera de même de (8 *bis*) pourvu que

$$\left|\frac{\lambda}{\alpha} \max \left|\frac{\psi}{\theta}\right|\right| > \log 4 - 1.$$

Si donc l'équation (8) est intégrable pour

$$\mu = \mu_0,$$

elle le sera encore pour

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + (\log 4 - 1) \frac{\alpha}{\max \left|\frac{\psi}{\theta}\right|}$$

et, par conséquent, pour

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + \frac{n\alpha}{\max \left|\frac{\psi}{\theta}\right|} (\log 4 - 1),$$

et comme le nombre n peut être pris aussi grand que l'on veut, elle sera intégrable pour toutes les valeurs de μ supérieures à μ_0.

Or l'équation (8) est intégrable pour $\mu = 0$, puisqu'elle se réduit alors à l'équation (7); elle est donc intégrable pour toutes les valeurs positives de μ. C. Q. F. D.

On peut conclure de là que l'équation

$$(1) \qquad Du = \theta e^u - \varsigma$$

est toujours intégrable pourvu :

1° Que la fonction ς soit toujours positive et ne puisse s'annuler;

2° Que cette fonction reste finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèces où θ devient infini;

3° Pourvu, enfin, que le rapport $\frac{\varsigma}{\theta}$ tende vers une limite déterminée quand on se rapproche de l'un de ces sommets et que cette limite ne soit ni nulle, ni infinie.

Dans ces conditions, en effet, le rapport $\frac{\varsigma}{\theta}$ restera constamment compris entre deux limites positives, de telle façon que

$$\beta > \frac{\varsigma}{\theta} > \alpha.$$

Nous pourrons poser

$$\varsigma = \alpha\theta + \psi.$$

Alors ψ sera toujours positif et le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ sera limité.

L'équation

$$Du = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi$$

sera donc intégrable pour toutes les valeurs positives de μ et, en particulier, pour la valeur 1. C. Q. F. D.

Dans le cas particulier des fonctions fuchsiennes de la première espèce, il n'y a pas de sommets de deuxième et de troisième espèce, la fonction θ est toujours finie, et l'équation (1) est intégrable si la fonction ς est toujours positive et toujours finie. Elle l'est, en particulier, si ς est une constante positive.

Supposons maintenant que ς soit toujours finie, mais ne soit pas toujours positive. Soit ς_0 la valeur moyenne de ς, de telle sorte que

$$\varsigma_0 \int d\omega = \int \varsigma\, d\omega.$$

Il existera alors une fonction v qui satisfera à

$$Dv = \varphi_0 - \varphi,$$

puisque $\int (\varphi_0 - \varphi)\, d\omega = 0$. (Cf § VI).

Il existera une fonction w satisfaisant à

$$Dw = \theta e^v e^w - \varphi_0,$$

pourvu que la constante φ_0 soit positive.

La fonction

$$u = v + w$$

satisfera alors à

$$Du = \theta e^u - \varphi.$$

Donc, *dans le cas des fonctions fuchsiennes de première espèce, c'est-à-dire dans le cas où θ est toujours fini, si, d'ailleurs, la fonction φ est toujours finie, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit intégrable, c'est que la valeur moyenne de φ soit positive.*

On peut généraliser ce résultat pour le cas où il y a des sommets de deuxième et de troisième espèce.

Supposons, en effet, que la fonction φ soit toujours finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèce, où le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tend vers une limite positive déterminée qui n'est ni nulle, ni infinie.

Supposons de plus que

$$\int \varphi\, d\omega > 0.$$

Il est évident qu'on peut poser

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

et cela de telle façon :

1° Que φ_1 soit toujours positive;

2° Que φ_2 soit toujours finie;

3° Que

$$\int \varphi_2\, d\omega = 0.$$

Alors le rapport $\frac{\varphi_1}{\theta}$ tendra vers une limite finie et différente de 0 dans le voisinage des sommets et l'on aura

$$\int \varphi_1 \, d\omega > 0.$$

Donc on trouvera des fonctions v et w qui satisferont à

$$Dv = -\varphi_2,$$
$$Dw = \theta e^v e^w - \varphi_1.$$

La fonction

$$u = v + w$$

satisfait alors à l'équation (1).

Donc l'équation est intégrable aux conditions suivantes :

1° *Si la valeur moyenne de φ est positive;*

2° *Si le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tend vers une limite positive finie et différente de 0 quand on se rapproche d'un sommet de deuxième ou de troisième espèce.*

Il subsiste encore une restriction dont je voudrais me débarrasser.

Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit être fini aux sommets de deuxième et de troisième espèce, et, de plus, *en ces sommets, il ne doit pas s'annuler*. Cette restriction est essentielle en ce qui concerne les sommets de troisième espèce, mais elle doit disparaître en ce qui concerne ceux de deuxième espèce.

Soit, en effet, ψ une fonction quelconque assujettie aux conditions suivantes :

1° Sa valeur moyenne sera nulle; 2° elle est finie partout, sauf aux sommets de deuxième espèce; 3° aux sommets de deuxième espèce, le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ sera positif et différent de zéro; on pourra alors, en vertu des principes du § VI, intégrer l'équation

$$Dv = \psi.$$

On ne le pourrait pas si nous avions supposé que le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ était

différent de o aux sommets de troisième espèce. L'intégrale

$$\int \psi_1 G(M, P; M_1, P_1)\, d\omega_1$$

ne serait pas alors restée finie quand M serait venu en un de ces sommets.

Soit, d'autre part, l'équation

$$(1) \qquad Du = \theta e^u - \varphi$$

et supposons que φ satisfasse aux conditions suivantes :

1° On a

$$\int \varphi\, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ a partout une valeur finie et déterminée ;

3° Aux sommets de deuxième espèce, cette valeur peut être positive, négative ou nulle ;

4° Aux sommets de troisième espèce, elle sera positive et différente de zéro.

Si nous posons

$$u - \lambda v = w,$$

il viendra

$$(9) \qquad Dw = \theta e^{\lambda v} e^w - \varphi - \lambda\psi.$$

Nous pourrons prendre la constante positive λ assez grande pour que, aux sommets de deuxième espèce, les rapports

$$\frac{\varphi + \lambda\psi}{\theta}, \qquad \frac{\varphi + \lambda\psi}{\theta e^{\lambda v}}$$

soient positifs, et, en effet, $\frac{\psi}{\theta}$ est positif, $\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|$ est limité.

Aux sommets de troisième espèce, ces rapports sont égaux à

$$\frac{\varphi}{\theta}, \qquad \frac{\varphi}{\theta e^{\lambda v}}$$

et, par conséquent, positifs d'après l'hypothèse.

On pourra donc intégrer l'équation (9) et, par conséquent, l'équation (1).

En résumé, *voici les conditions pour que l'équation* (1) *soit intégrable :*

1° On doit avoir

$$\int \varphi \, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit avoir partout une valeur finie et déterminée;

3° Cette valeur, qui peut être quelconque aux sommets de deuxième espèce, doit être positive et différente de zéro aux sommets de troisième espèce.

XI. — Application aux fonctions fuchsiennes.

Nous venons de voir à quelles conditions peut s'intégrer l'équation (1) du paragraphe précédent; or, au début de ce travail, nous avons montré que la formation des fonctions fuchsiennes dépend de l'intégration d'une équation de même forme,

$$(1) \qquad DU = \theta e^U - \Phi.$$

Voyons si elle satisfait aux conditions énoncées.

La fonction Φ est finie, sauf aux sommets de troisième espèce, et en ces sommets la valeur du rapport $\frac{\Phi}{\theta}$ est finie, déterminée, positive et différente de zéro; c'est ce que nous avons montré à la fin du § IV.

Il reste donc à vérifier que l'on a

$$\int \Phi \, d\omega > 0.$$

Je rappelle que

$$-\Phi = D \log \frac{d\omega}{d\omega} + Dh,$$

h étant une fonction partout finie, sauf aux sommets de deuxième et

de troisième espèce et telle que la différence

$$(2) \qquad h - \left(2 - \frac{2}{n}\right) \log |Z - A|$$

reste finie aux sommets de deuxième espèce et que la différence

$$(3) \qquad h - 2 \log |Z - A| - 2 \log\log |Z - A|$$

reste finie aux sommets de troisième espèce.

Nous supposerons que Z est lié à Z′ par une relation algébrique

$$F(Z, Z') = 0.$$

Cette relation représente une courbe algébrique d'ordre m; je puis, sans restreindre la généralité, supposer que cette courbe a ses m directions asymptotiques distinctes et qu'elle n'a d'autre singularité que des points doubles ordinaires.

Je puis supposer aussi que les sommets de deuxième ou de troisième espèce ne correspondent ni à un point double de la courbe, ni à un point à l'infini, ni à un point où la tangente est parallèle à l'axe des Z [c'est ce qui m'a permis tout à l'heure d'écrire $Z - A$ et non $Z'' - A''$ dans les formules (2) et (3)].

Cela posé, quand $\log \frac{d\Omega}{d\omega}$ devient-il infini?

1° Quand $\frac{d\Omega}{d\omega}$ devient infini, c'est-à-dire quand le point Z, Z′ s'éloigne à l'infini sur l'une des branches asymptotiques de la courbe;

2° Aux points où la tangente est parallèle à l'axe des Z, on a

$$\frac{dZ}{dZ'} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 0$$

et, comme $\frac{d\Omega'}{d\omega}$ est fini, $\frac{d\Omega}{d\omega}$ est nul;

3° Aux points doubles, on a, à la fois,

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{dF}{dZ'} = 0;$$

mais Z' est fonction holomorphe de Z et $\frac{d\Omega}{d\omega}$ reste fini.

Nous avons donc

$$\Phi = D\psi,$$
$$\psi = -\log\frac{d\Omega}{d\omega} - h$$

et ψ devient logarithmiquement infini en un certain nombre de points singuliers qui se répartissent en quatre sortes :

Première sorte. — Ce sont les m points à l'infini de la courbe $F = 0$.

Deuxième sorte. — Ce sont les points où $\frac{dF}{dZ'} = 0$; leur nombre est

$$m(m-1) - 2d.$$

d étant le nombre des points doubles, ou bien

$$2m + 2p - 2,$$

p étant le genre de la courbe.

Troisième sorte. — Ce sont les sommets de deuxième espèce.

Quatrième sorte. — Ce sont les sommets de troisième espèce.

Entourons chacun de ces points singuliers d'une courbe infiniment petite. La surface de Klein se trouve partagée en deux régions; la région intérieure à ces petites courbes qui est infiniment petite et la région extérieure qui est finie.

L'intégrale $\int \Phi\, d\omega$, étendue à la région intérieure, est infiniment petite. L'intégrale étendue à la région extérieure est

$$\int \Phi\, d\omega = \int D\psi\, d\omega = \int \frac{d\psi}{dn}\, d\sigma,$$

en vertu de l'équation (3 *bis*) du § III; dn et $d\sigma$ sont définis comme au § III, que la surface de Klein soit isotrope ou anisotrope.

L'intégrale du troisième membre est étendue au périmètre de toutes les petites courbes; mais il faut observer que les dn positifs doivent être comptés vers l'extérieur de la région où se fait l'intégration double, c'est-à-dire vers l'*intérieur* de la petite courbe.

Considérons d'abord une petite courbe entourant un des m points singuliers de la première sorte; ceux où Z devient infini.

Nous prendrons

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

d'où

$$\frac{d\Omega}{d\Omega''} = \left|\frac{dZ}{dZ''}\right|^2 = \frac{1}{|Z''|^2}.$$

A l'intérieur de notre petite courbe nous avons donc

$$\psi = 4\log|Z''| - \log\frac{d\Omega''}{d\omega} - h.$$

Or, $\log\frac{d\Omega''}{d\omega} + h$ reste fini; notre intégrale est donc égale, en négligeant des infiniment petits, à

$$4\int\frac{d\log|Z''|}{dn}\,d\sigma,$$

ou bien, toujours avec les notations du § III,

$$4\int\frac{d\log|Z''|}{dN''}\,dS'',$$

dS'' et dN'' étant les arcs infiniment petits qui correspondent sur le plan des Z'' aux arcs $d\sigma$ et dn de la surface de Klein.

Si nous posons

$$Z'' = \rho e^{i\omega}$$

et si l'on suppose que la petite courbe a pour équation $\rho = \text{const.}$, et correspond à un cercle sur le plan des Z''; cette intégrale peut s'écrire

$$4\int\frac{d\log\rho}{d\rho}\rho\,d\omega = 4\int d\omega = -8\pi.$$

J'ai mis le signe $-$, parce que les dN'' positifs doivent être comptés vers l'intérieur du petit cercle $\rho = \text{const}$.

Considérons maintenant une petite courbe entourant un des

$$2m + 2p - 2$$

points singuliers de la deuxième sorte.

Soit $Z = A$, $Z' = A'$ ce point singulier. Nous aurons

$$\psi = -\log\frac{d\Omega}{d\omega'} - \log\frac{d\Omega'}{d\Omega} - h.$$

D'autre part, on aura

$$Z - A = (Z' - A')^2 H,$$

H étant une série ordonnée suivant les puissances de $Z - A'$ et ne s'annulant pas pour $Z' = A'$.

On en déduit

$$\frac{dZ}{dZ'} = (Z' - A')H,$$

H ne s'annulant pas pour $Z' = A'$.

Il vient donc

$$\log\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 2\log\left|\frac{dZ}{dZ'}\right| = 2\log|Z' - A'| + 2\log H,$$

d'où

$$\psi = -2\log|Z - A'| - 2\log H' - \log\frac{d\Omega'}{d\omega} - h.$$

L'expression

$$2\log H' + \log\frac{d\Omega'}{d\omega} + h$$

reste finie; donc l'intégrale se réduit à

$$-2\int\frac{d\log|Z' - A'|}{dn}\,d\sigma.$$

Le même calcul montrerait que cette intégrale est égale à 4π.

Considérons une courbe entourant un point singulier de la troisième

sorte: il vient

$$h = \left(2 - \frac{2}{n}\right) \log |Z - A| + h_1,$$

h_1 étant fini et, par conséquent,

$$\psi = \left(\frac{2}{n} - 2\right) \log |Z - A| - h_1 - \log \frac{d\omega}{d\omega},$$

$h_1 + \log \frac{d\omega}{d\omega}$ étant fini.

Notre intégrale est donc égale à

$$\left(\frac{2}{n} - 2\right) \int \frac{d \log |Z - A|}{dn} d\sigma$$

(dans cette formule, la lettre n figure deux fois dans deux sens différents: n est un nombre entier et dn une longueur infiniment petite: mais aucune confusion n'est à craindre), c'est-à-dire, toujours d'après le même raisonnement, à

$$4\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Passons enfin aux sommets de la quatrième sorte: on a

$$h = 2 \log |Z - A| + 2 \log\log |Z - A| + h_1,$$

h_1 restant fini: notre intégrale se réduit donc à

$$-2 \int \frac{d \log |Z - A|}{dn} d\sigma - 2 \int \frac{d \log\log |Z - A|}{dn} d\sigma.$$

La première intégrale se réduit à 4π. Quant à la seconde, si nous posons

$$Z - A = \rho e^{i\omega}$$

et si nous supposons que la petite courbe a pour équation $\rho = \text{const.}$, elle se réduit à

$$-2 \int \frac{d \log\log \rho}{d\rho} \rho \, d\omega = 2 \int \frac{d\omega}{\log \rho}$$

et tend vers zéro quand ρ tend vers zéro.

L'intégrale se réduit donc finalement à 4π.

En résumé, nous trouvons :

1° Pour les m points de la première sorte :

$$-8m\pi;$$

2° Pour les $2m + 2p - 2$ points de la deuxième sorte :

$$8m\pi + 8p\pi - 8\pi;$$

3° Pour les q points de la troisième sorte (sommets de la deuxième espèce) :

$$4\pi\left(q - \sum \frac{1}{n}\right),$$

4° Pour les q' points de la quatrième sorte (sommets de la troisième espèce) :

$$4q'\pi.$$

Nous avons donc finalement

$$\int \Phi\, d\omega = 4\pi\left(2p - 2 + q + q' - \sum \frac{1}{n}\right).$$

Considérons le polygone fuchsien R_0, et soit $2k$ le nombre de ses côtés, h le nombre des cycles de sommets de première espèce, q et q' ceux des cycles de sommets de deuxième et de troisième espèce.

La somme des angles est égale à

$$2\pi\left(h + \sum \frac{1}{n}\right).$$

Le déficit angulaire (proportionnel à la surface non euclidienne) est

$$2\pi\left(k - 1 - h - \sum \frac{1}{n}\right).$$

On a, d'autre part,

$$p = \frac{k + 1 - h - q - q'}{2},$$

d'où

$$k = 2p - 1 + h + q + q',$$

ce qui montre que le déficit angulaire est égal à

$$2\pi\left(2p - 2 + q + q' - \sum \frac{1}{n}\right).$$

L'intégrale $\int \Phi\, d\omega$ est donc égale au double du déficit angulaire.

Elle est donc positive. C. Q. F. D.

Donc l'équation

$$DU = \theta e^{\lambda} - \Phi$$

peut s'intégrer; donc, dans tout type fuchsien, il y a une équation fuchsienne.

Le théorème fondamental est démontré pour toutes les fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental; je me réserve d'y revenir en ce qui concerne les autres fonctions fuchsiennes et en particulier celles de la troisième famille.

XII. — Formation des équations fuchsiennes.

Soit

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dZ^2} = v\varphi(Z, Z')$$

notre équation fuchsienne, où φ est une fonction rationnelle des deux variables Z et Z' liées par la relation algébrique

$$(2) \qquad f(Z, Z') = 0.$$

Les deux intégrales fondamentales de cette équation seront

$$v_1 = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dZ}{dz}}$$

et Z sera une fonction fuchsienne de z.

Si l'on désigne par v_1^0 et v_2^0 les imaginaires conjuguées de v_1 et v_2, on aura

$$v_1^0 = \sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}, \qquad v_2^0 = z_0\sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}.$$

D'autre part, nous avons posé

$$e^u = \frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

d'où

$$e^{-\frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}\sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}(1 - zz_0),$$

ou bien

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0.$$

L'exponentielle $e^{-\frac{u}{2}}$ est une fonction de Z et Z_0 et nous avons, dans ce Mémoire, appris à former cette fonction pour les couples de valeurs Z et Z_0 qui sont imaginaires conjuguées.

Cela posé, il vient

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = \frac{d^2 v_1}{dZ^2} v_1^0 - \frac{d^2 v_2}{dZ^2} v_2^0;$$

ou, à cause de l'équation (1),

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = e^{-\frac{u}{2}} \varphi(Z, Z^0),$$

ou enfin,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 u}{dZ^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2 = \varphi.$$

La fonction u est connue pour tous les couples de valeurs conjuguées de Z et Z_0, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de X et de Y (en posant $Z = X + iY$).

On connaît donc aussi pour toutes les valeurs réelles de X et de Y les dérivées $\frac{du}{dX}$ et $\frac{du}{dY}$ et, par conséquent,

$$\frac{du}{dZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dX} + \frac{du}{i\,dY}\right),$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{2\,d^2 u}{i\,dX\,dY} - \frac{d^2 u}{dY^2}\right).$$

Nous connaissons donc φ et, par conséquent, l'équation fuchsienne est

formée. Il est aisé de vérifier que φ est fonction de Z seulement; en effet,

$$\frac{d\varphi}{dL_0} = -\frac{1}{2}\frac{d^3u}{dL^2\,dL_0} + \frac{1}{2}\frac{du}{dL}\frac{d^2u}{dL\,dL_0}.$$

Or

$$\frac{d^2u}{dL\,dL_0} = 2e^u, \qquad \frac{d^3u}{dL^2\,dL_0} = 2e^u\frac{du}{dL}.$$

Donc

$$\frac{d\varphi}{dL_0} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On vérifierait facilement les autres propriétés de la fonction φ.

Ces considérations peuvent nous permettre d'entrevoir une autre démonstration de l'existence de l'équation fuchsienne.

Supposons que nous considérions les équations d'un même type fuchsien; la fonction φ qui y figurera ne sera pas entièrement arbitraire; elle dépendra seulement d'un nombre fini N de paramètres.

Les intégrales v_1 et v_2 dépendront de ces N paramètres et, en plus, de quatre constantes d'intégration.

Si l'on forme de cette manière l'expression

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0,$$

ce sera une fonction de X et de Y qui dépendra de N + 4 paramètres. Seulement la fonction ainsi définie pourrait n'être pas uniforme sur la surface de Klein; on la rendrait uniforme par des coupures.

On formerait ensuite l'intégrale du § IX et l'on répéterait le raisonnement de ce paragraphe fondé sur le calcul des variations. Mais cette fois *ce raisonnement serait rigoureux*, parce que l'intégrale ne dépendrait plus d'une fonction arbitraire, mais d'un certain nombre de constantes arbitraires.

On serait donc certain qu'elle a un minimum.

De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène.

PAR M. MATHY.

I.

Pour résoudre cette question, il faut d'abord calculer *les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde homogène sur un point de sa surface;* elles se déduisent des valeurs relatives au point extérieur à l'ellipsoïde dans lesquelles on fait la limite supérieure de l'intégration $= 1$, car pour un point de la surface $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, il est évident qu'à la limite inférieure zéro l'intégrale est elle-même zéro; on peut alors écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{3\,\mathrm{M}\,m.x}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,[\zeta(v+\omega_3)-\eta_{13}+e_3 v]^{pv\ c=c}, \\ Y &= \frac{3\,\mathrm{M}\,m.y}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\,[\zeta(v+\omega_2)-\eta_{12}+e_2 v]^{pv-c=b^2}, \\ Z &= \frac{3\,\mathrm{M}\,m.z}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\,[\zeta(v+\omega_1)-\eta_{11}+e_1 v]^{pv\ c=a^2}. \end{aligned}\right.$$

Ces expressions peuvent être simplifiées.

D'abord la formule d'addition des arguments dans la formule ζ devient, au cas où l'un des arguments est ω_α,

$$\begin{aligned} \zeta(v+\omega_\alpha) &= \zeta(v)+\zeta\omega_\alpha+\frac{1}{2}\,\frac{p'v-p'\omega_\alpha}{pv-p\omega_\alpha} \\ &= \zeta v+\eta_{1\alpha}+\frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv-e_\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part, les limites supérieures dans les intégrales sont égales; ainsi dans X, de $e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2)$ et de $pv - e_3 = a^2$, on déduit $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, valeur identique pour Y et Z.

Les égalités (1) se changent en (2)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{3Mmx}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv-e_3} + e_3 v\right),\\ Y &= \frac{3Mmy}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv-e_2} + e_2 v\right),\\ Z &= \frac{3Mmz}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv-e_1} + e_1 v\right),\end{aligned}\right.$$

avec la valeur de

$$pv = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$p'v = -2abc.$$

Ces formules permettent de retrouver celles qui conviennent aux deux ellipsoïdes de révolution.

Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution aplati $a = b$, d'où $k = 0$, il y a dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions circulaires.

Les formules à appliquer sont les suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &g_2 = 3e_1^2, \qquad g_3 = e_1^3,\\ &pv = -\frac{3}{2}\,\frac{g_3}{g_2} + \frac{9}{2}\,\frac{g_3}{g_2}\,\frac{1}{\sin^2 v\sqrt{\dfrac{9g_3}{2g_2}}} = -\frac{e_1}{2} + \frac{3e_1}{2}\,\frac{1}{\sin^2 v\sqrt{\dfrac{3e_1}{2}}},\\ &\zeta v = \frac{e_1}{2}\,v + \sqrt{\frac{3e_1}{2}}\,\cot v\sqrt{\frac{3e_1}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Elles conduisent, dans le cas présent, à

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2 = (a^2 - c^2)\,\frac{1}{\sin^2 v\sqrt{a^2-c^2}},\\ &v\sqrt{a^2-c^2} = \text{arc tang}\,\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c},\\ &\zeta v = \frac{e_1}{2}\,v + c.\end{aligned}\right.$$

Portées dans l'expression de Z, ces valeurs la transforment successivement en

$$Z = \frac{3Mmz}{(a^2-c^2)^2}\left(\frac{e_1}{2}v + c - \frac{a^2}{c} + e_1 v\right),$$

$$Z = \frac{3Mmz}{(a^2-c^2)^2}\left[(a^2-c^2)v + \frac{c^2-a^2}{c}\right],$$

$$(6) \qquad Z = -\frac{3Mmz}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right).$$

Elle est identique à l'intégrale directe.

Y et Z se présentent d'abord sous la forme $\frac{0}{0}$, à cause du facteur $a-b$; il suffit d'appliquer le procédé bien connu des dérivées pour faire apparaître leurs vraies valeurs.

Dans l'ellipsoïde de révolution allongé $b = c$, il en résulte $k = 1$: les fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions hyperboliques. On se sert alors de

$$(7) \qquad \begin{cases} pu = e_3 - \frac{3}{2}e_3\left(\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}}\right)^2 \\ \zeta u = \frac{e_3}{2}u - \sqrt{-\frac{3}{2}e_3}\,\frac{e^{-v}+e^v}{e^{-v}-e^v} \end{cases} \qquad v = u\sqrt{-\frac{3}{2}e_3},$$

qui deviennent, avec les hypothèses actuelles,

$$(8) \qquad \begin{cases} a^2 = (a^2-c^2)\left(\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}}\right)^2, \\ v = \log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right). \\ \zeta u = \frac{e_3}{2}u + a, \end{cases}$$

et permettent par substitution de vérifier les formules applicables à ce cas particulier.

II.

De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène tournant uniformément autour d'un axe fixe et dont les molécules sont soumises à leurs attractions mutuelles suivant la loi de la gravitation.

Admettons que Oz soit l'axe de rotation de la masse fluide dans son état d'équilibre relatif; d'après les formules (2) du Chapitre précédent, en désignant par

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{3Mm}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_3} + e_3 v\right),\\ Q &= \frac{3Mm}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_2} + e_2 v\right),\\ R &= \frac{3Mm}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_1} + e_1 v\right),\\ n &= \text{vitesse angulaire autour de l'axe de rotation,}\end{aligned}\right.$$

nous savons que l'équation de la surface libre du liquide est

$$(2)\qquad z^2 + \frac{Q-n^2}{R}y^2 + \frac{P-n^2}{R}x^2 = \text{const.};$$

pour qu'elle coïncide avec celle de l'ellipsoïde

$$(3)\qquad z^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 = c^2,$$

il faut que

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} Q - n^2 &= \frac{Rc^2}{b^2},\\ P - n^2 &= \frac{Rc^2}{a^2}.\end{aligned}\right.$$

On en déduit $Q - P = \frac{Rc^2}{a^2b^2}(a^2-b^2)$; remplaçant P, Q et R par

leurs valeurs (1), on obtient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_2} + e_2 v}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} - \frac{\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_3} + e_3 v}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ &= \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}\,\frac{\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1} + e_1 v}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned}\right.$$

Cette condition doit exister pour $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

ζv ne renferme pas de terme constant; on peut déduire ζv de l'expression (5), et en dérivant par rapport à v, on doit retrouver pv, en quantité déterminée; cela revient à dériver l'équation (5) et à remplacer pv et ses dérivées par leurs valeurs pour reconnaître si la condition est satisfaite identiquement.

Il suffit de calculer un des termes : soit

$$\frac{-pv + \frac{1}{2}\frac{p''v(pv - e_2) - p'^2 v}{(pv - e_2)^2} + e_2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}.$$

Or, de

$$p''v = 6p^2 v - \frac{1}{2}g_2,$$

on a

$$\begin{aligned} p''v &= \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{3}\left[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2\right] \\ &= 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{p''v(pv - e_2) - p'^2 v}{(pv - e_2)^2} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2}{b^2};$$

d'où

$$\frac{-pv + \frac{1}{2}\frac{p''v(pv - e_2) - p'v^2}{(pv - e_2)^2} + e_2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} = -\frac{1}{b^2}.$$

Alors, on trouve facilement que l'équation (5) dérivée conduit, avec

$pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, à l'identité

$$(6) \qquad -\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} \times -\frac{1}{c^2}.$$

Il reste à calculer la vitesse angulaire déduite de (4)

$$(7) \qquad n^2 = \frac{Qb^2 - Rc^2}{b^2} = \frac{Pa^2 - Rc^2}{a^2},$$

ou encore

$$n^2 = \frac{3Mm}{b^2} \frac{-b^2(a^2-c^2)\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_2} + e_2 v\right) - c^2(a^2-b^2)\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1} + e_1 v\right)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)(b^2-c^2)}.$$

$$n^2 = \frac{3Mm}{b^2} \frac{\zeta v(2b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2) + abc(2a^2 - b^2 - c^2) - v[e_2 b^2(a^2-c^2) + e_1 c^2(a^2-b^2)]}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Le signe du numérateur dépend de $2a^2 - b^2 - c^2$ qui est essentiellement positif, car $a^2 > b^2 > c^2$.

L'équilibre relatif est impossible quand la rotation se fait autour d'un autre axe; ainsi, si elle avait lieu autour du grand axe

$$(8) \qquad n^2 = \frac{Qb^2 - Pa^2}{b^2} = \frac{Rc^2 - Pa^2}{c^2}$$

et autour de l'axe moyen

$$(9) \qquad n^2 = \frac{Rc^2 - Qb^2}{c^2} = \frac{Pa^2 - Qb^2}{a^2}.$$

Les valeurs de n, tirées de (8) ou de (9), sont imaginaires; on le démontre en les comparant à (7).

On peut conclure que l'ellipsoïde homogène, à trois axes inégaux, dont les molécules sont soumises à leurs attractions mutuelles, devient une figure d'équilibre relatif quand il tourne autour de son plus petit axe avec la vitesse angulaire uniforme et unique dépendant de la forme de l'ellipsoïde.

Des ellipsoïdes de révolution.

En faisant $a = b$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} p\varsigma &= \tfrac{1}{3}(2a^2 + c^2), \\ p'\varsigma &= -2a^2 c, \\ e_1 &= \tfrac{2}{3}(a^2 - c^2); \qquad e_2 = e_3 = -\tfrac{1}{3}(a^2 - c^2) = -\tfrac{1}{2}e_1, \end{aligned}\right.$$

l'équation (5) se transforme en

$$(10) \qquad 2(a^2 - c^2)\left(\zeta\varsigma - c - \frac{e_1}{2}\varsigma\right) = 0.$$

Or, on satisfait à cette relation par :

1° $a = c$, ce qui donne la sphère ;

2° $\zeta\varsigma = c + \frac{e_1}{2}\varsigma$, ce qui convient à l'ellipsoïde de révolution aplati d'après la formule (4) du précédent Chapitre.

Quant à la vitesse angulaire correspondante, elle devient

$$(11) \qquad n^2 = \frac{Qb^2 - Rc^2}{b^2} = \frac{3Mmc^2}{a^2(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} - \text{arc tang}\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right].$$

En prenant OX comme axe de rotation, l'équation de condition serait, après y avoir fait $b = c$,

$$(12) \qquad (a^2 - c^2)\left(\zeta\varsigma - a - \frac{e_1}{2}\varsigma\right) = 0.$$

Mais la vitesse n, ayant alors pour expression

$$n^2 = \frac{Qb^2 - Pa^2}{b^2} = -\frac{3Mma^2}{c^2}\left[\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} - \log\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right],$$

démontre que l'ellipsoïde de révolution allongé ne peut être une figure d'équilibre relatif.

Fondation Beneke;

La Faculté de Philosophie de l'Université George-Auguste, de Göttingue, publie l'avis suivant :

Fondation Beneke.

Le 11 mars 1898, anniversaire du jour de la naissance du Fondateur, Charles-Gustave Beneke, conseiller au Consistoire, il a été publié que, pour le concours de 1897, aucun Mémoire n'a été présenté.

En même temps, la Faculté de Philosophie a proposé, pour l'année 1901, le nouveau sujet suivant :

« Le principe de continuité, ou encore, plus spécialement, la représentation par des fonctions indéfiniment différentiables ont été longtemps considérés comme universellement applicables à l'étude mathématique des phénomènes naturels. Ce postulatum a été introduit comme allant de soi par les inventeurs du Calcul différentiel et intégral; mais les progrès des recherches mathématiques ont démontré de plus en plus qu'il impliquait une grande quantité d'hypothèses tacites auxquelles, dans l'état d'inexactitude toujours existante de nos perceptions sensibles, on n'est pas forcé de se tenir. Cette conception est d'ailleurs en contradiction avec l'hypothèse de la constitution moléculaire de la matière.

» La Faculté désire qu'un travail, prenant pour base l'état actuel de la Science, expose d'une manière généralement intelligible les questions relatives à ce sujet et soumette à un examen approfondi la légitimité et l'opportunité des théories habituelles. Ce Mémoire pourra être conçu plus spécialement au point de vue mathématique, philosophique ou psychologique; on désire également des études historiques, mais sans les exiger.

» Les manuscrits doivent être rédigés dans une des langues modernes et nous être envoyés avant le 31 août 1900, pourvus d'une devise sur la page de titre, avec une lettre scellée, portant à l'extérieur la devise du travail, à l'intérieur les noms, profession et domicile de l'auteur. Le nom de l'auteur ne doit pas être indiqué d'une autre façon. Sur la page de titre doit être indiquée en outre l'adresse à laquelle le travail doit être renvoyé dans le cas où il ne serait pas jugé digne de prix.

» Le premier prix s'élève à 3400 marks, le second prix à 680 marks.

» L'attribution des prix aura lieu le 11 mars 1901, en séance publique de la Faculté de Philosophie de Göttingue.

» Les travaux couronnés restent la propriété exclusive de leurs auteurs.

» Les autres sujets, pour lesquels les manuscrits doivent être envoyés avant le 31 août 1898 et 31 août 1899, ont été indiqués précédemment [1]. »

Göttingue, le 11 mars 1898.

La Faculté de Philosophie.

Le Doyen,

G. Cohn.

---

[1] *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. Geschäftliche Mittheilungen;* 1896, S. 69; 1897, Heft 1, S. 26.

Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet;

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

La question qui fera l'objet principal de ce Mémoire est celle de la possibilité du problème électrostatique, en particulier du problème fondamental qui a pour but la recherche de la distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur soustrait à toute influence extérieure.

On sait que ce problème a une connexion intime avec un cas particulier du problème de Dirichlet, et cette connexion est telle, qu'on peut regarder le premier problème comme résolu, si l'on parvient à résoudre le second.

Mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que, pour la solution du problème de Dirichlet, l'on obtienne une expression qui se prête immédiatement aux calculs. Cependant on ne connaît de pareilles expressions que dans quelques suppositions particulières à l'égard du conducteur et, en général, les méthodes dont on dispose ne servent qu'à faire voir la possibilité du problème de Dirichlet.

Or, si l'on n'a démontré que cette possibilité, on n'a pas encore le droit d'affirmer que le problème électrostatique soit aussi possible.

En effet, pour que l'affirmation soit légitime, il faut non seulement établir la possibilité du problème de Dirichlet, mais encore démontrer que sa solution, dans le cas d'où dépend le problème électrostatique, peut être présentée sous forme du potentiel d'une simple couche ré-

pandue sur la surface du conducteur. Il faut donc démontrer l'existence de la fonction susceptible de représenter la densité de cette couche, et cela exige la considération des valeurs, sur la surface du conducteur, de la dérivée normale (dérivée estimée suivant la normale) de la fonction harmonique (¹) cherchée. Or, les méthodes générales qu'on a proposé pour traiter le problème de Dirichlet conduisent à des résultats qui ne font pas voir que ces valeurs existent et, de là, provient la difficulté qui ne paraît pas avoir été levée.

Il est vrai que, pour démontrer la possibilité du problème électrostatique, on s'est servi souvent de la méthode directe fondée sur certaines considérations de minima dues à Gauss. Mais ces considérations sont aussi peu suffisantes que celles de la même espèce qu'on employait autrefois pour démontrer le principe de Dirichlet.

Donc, à la rigueur, cette méthode ne démontre rien, et la question qui nous intéresse ne peut être regardée comme résolue, si ce n'est dans quelques cas particuliers.

Cependant, dans certaines recherches, il est bien important de savoir si le problème considéré est possible en général. C'est ce qui m'a décidé à reprendre la question pour essayer de déduire la démonstration requise des principes des méthodes que possède aujourd'hui la Science pour traiter le problème de Dirichlet.

Je me suis arrêté aux méthodes de M. Neumann, qui sont les plus simples, et, en partant du principe fondamental de ces méthodes, j'ai réussi à établir, dans des suppositions assez générales, non seulement la possibilité du problème électrostatique dont il s'agit, mais encore la méthode qu'a proposée, pour le résoudre, M. Robin (²)

(¹) Dans ce qui suit, nous entendrons par fonction harmonique dans le domaine E toute fonction qui, pour les points du domaine E, sauf, peut-être, ceux de sa frontière, est uniforme et continue, ainsi que ses dérivées par rapport aux coordonnées, et qui satisfait à l'équation de Laplace. D'ailleurs, si le domaine E s'étend à l'infini, cette fonction doit s'annuler à l'infini, en tendant vers zéro uniformément dans toutes les directions (nous supposons que la frontière du domaine E ne s'étende pas à l'infini).

(²) Il est à se rappeler que M. Robin n'a établi sa méthode que *dans la supposition qu'on ait préalablement démontré la possibilité du problème.* Récemment M. Stekloff a signalé une modification de l'analyse de M. Robin

Cela étant établi, on peut s'en servir pour aborder les questions plus générales. C'est ce que j'ai aussi essayé de faire, en considérant le cas général du problème de Dirichlet et en recherchant les conditions assurant l'existence, sur la surface qui sert de frontière au domaine considéré, des valeurs limites des dérivées de la fonction harmonique cherchée.

En traitant ce problème par une méthode convenable, je suis parvenu à montrer qu'en ce qui concerne la dérivée normale la question se ramène à celle de la même espèce pour le potentiel de la double couche dont la densité est égale à la valeur de la fonction harmonique sur la surface.

L'étude de ces sortes de questions n'est pas sans importance, puisque les valeurs, sur la surface, des dérivées de la fonction harmonique se présentent dans bien des cas : il n'y a qu'à se rappeler le problème général de l'Électrostatique, ainsi que la formule connue dont on se sert souvent pour représenter la solution du problème de Dirichlet, formule qui contient la dérivée normale de la fonction de Green.

Telles sont les questions qui feront l'objet des recherches qui vont suivre.

CHAPITRE I.

HYPOTHÈSES ET PROPOSITIONS AUXILIAIRES.

1. Notre Étude se rapportera au cas d'une surface *fermée* S à l'égard de laquelle nous ferons les suppositions suivantes :

1° En tout point de S il existe un plan tangent déterminé;

---

permettant de se débarrasser de cette supposition et, par suite, d'établir la possibilité du problème (*Comptes rendus*, 13 décembre 1897). L'analyse de M. Stekloff, comme celle de M. Robin, ne s'applique qu'aux surfaces convexes. Dans les *Comptes rendus* (22 novembre 1897), en énonçant les résultats de mon étude de la question, je me suis aussi restreint à la supposition que la surface considérée soit convexe. Mais, pour mon analyse, cette restriction n'a rien d'essentiel et, comme on le verra dans le présent Mémoire, elle peut être remplacée par une autre, plus générale (*voir* le n° 7).

2° Il existe une longueur D, telle que, un point quelconque p de S étant pris pour centre de la sphère de rayon D, une parallèle à la normale à S en p ne puisse rencontrer S, à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;

3° $\mathfrak{z}$ étant l'angle aigu que fait la normale au point quelconque p de S avec celle d'un autre point p' de cette surface et r la distance mutuelle de ces deux points, on peut assigner deux nombres positifs a et α indépendants du choix des points p et p' et tels qu'on ait

$$\mathfrak{z} < ar^{\alpha},$$

quelles que soient les positions de ces points.

Outre ces suppositions, nous en aurons à faire encore une. Mais nous l'énoncerons plus tard et, à présent, nous nous arrêterons sur les suppositions ci-dessus pour en déduire quelques conséquences qui nous seront nécessaires dans la suite.

En prenant un point quelconque p_0 de S pour origine des coordonnées rectangulaires et la normale en ce point pour axe des z, considérons les points de S dont la distance r_0 au point p_0 ne surpasse pas D.

Soient p un de ces points et x, y, z ses coordonnées.

En vertu de la deuxième supposition, z sera une fonction uniforme de x, y, s'annulant pour $x = y = 0$, et cette fonction, en vertu des deux autres suppositions, admettra les dérivées

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

qui seront continues, si D est assez petit pour que l'angle $\mathfrak{z}_0$ que fait la normale au point p avec celle du point p_0 ne puisse atteindre $\frac{\pi}{2}$; c'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a

$$a\mathrm{D}^{\alpha} < 1.$$

D'ailleurs, si l'on admet cette inégalité et que l'on tienne compte de ce que

$$\cos\mathfrak{z}_0 > 1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}_0^2 > 1 - \tfrac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha},$$

on trouve

$$\frac{1}{\cos\mathfrak{z}_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 1 + a^2 r_0^{2\alpha},$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 < 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} < 3a^2 r_0^{2\alpha}.$$

Maintenant posons

$$x = \rho\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\psi$$

et considérons z comme fonction de ρ et de ψ.

Puisqu'on a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 < \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

on aura

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}\, a r_0^{\alpha},$$

et, par suite,

$$|z| < \sqrt{3}\, a D^{\alpha} \rho < \sqrt{3}\, \rho.$$

De là on conclut

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2} < 2\rho.$$

On a donc

$$(1) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}\, a\, 2^{\alpha} \rho^{\alpha},$$

et, par suite,

$$|z| < \frac{\sqrt{3}\, 2^{\alpha}}{\alpha + 1}\, a \rho^{\alpha+1},$$

ce que l'on peut remplacer par l'inégalité plus simple

$$(2) \qquad |z| < 2a\rho^{\alpha+1},$$

en remarquant que $2^{\alpha} \leqq \alpha + 1$, puisque le nombre α ne peut pas évidemment surpasser 1.

En même temps on aura

$$(3)\qquad \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < 4a\rho^{\alpha},$$

$$(4)\qquad \frac{1}{\cos\xi_0} < 1+4a^2\rho^{2\alpha}.$$

Toutes ces inégalités auront lieu, tant que $r_0 \leq D$, si l'on prend pour D, ainsi que nous le supposerons dans la suite, une quantité satisfaisant non seulement à la condition de la deuxième supposition, mais encore à celle-ci, $aD^{\alpha} \leq 1$.

Pour ce qui va suivre il est utile de remarquer que, si l'on construit un cylindre de révolution C ayant pour axe l'axe des z et, pour la plus courte distance de ses génératrices à l'axe, une quantité plus petite que $\frac{1}{2}D$, la portion S_0 de S, découpée par C au voisinage du point p_0, se trouvera tout entière à l'intérieur de la sphère de rayon D ayant pour centre le point p_0. Donc, les inégalités ci-dessus auront lieu pour tous les points de S_0.

2. Dans la suite, nous aurons à considérer des potentiels soit d'une simple couche, soit d'une double couche répandue sur S, et à présent nous nous arrêterons sur quelques propositions relatives à ces potentiels.

Nous commencerons par préciser la notion de ce que nous appellerons la *dérivée normale* d'une fonction au point quelconque de S.

La surface S étant fermée, l'espace tout entier sera partagé par elle en deux portions : l'espace intérieur E_i et l'espace extérieur E_e.

Considérons l'un quelconque de ces deux espaces que nous désignerons par E.

Soient $P(x, y, z)$ un point de E, et $F(x, y, z)$ une fonction définie dans le domaine E, fonction que nous supposerons uniforme et continue, ainsi que ses dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

tant que le point P ne se trouve pas sur S.

Supposons que le point P soit situé sur la normale au point p de S et, en entendant par n l'une des deux directions de cette normale, considérons l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial F}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(n, z),$$

que nous désignerons par

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_P.$$

Supposons maintenant que le point P, *en restant toujours sur la normale* n, se rapproche indéfiniment du point p.

Alors, si l'expression ci-dessus tend vers une limite, cette limite représentera ce que nous appellerons la *dérivée normale* de la fonction F au point p, et ce que nous désignerons par $\frac{\partial F}{\partial n}$.

Dans les cas où il sera nécessaire d'appeler l'attention sur l'espace considéré, nous désignerons le point P par P_i ou par P_e, suivant qu'il appartient à E_i ou à E_e, et la limite dont il s'agit sera désignée par

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_i \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_e,$$

de sorte qu'on aura

$$\lim\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{P_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_i, \qquad \lim\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{P_e} = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_e,$$

les points P_i, P_e se rapprochant indéfiniment du point p.

Nous appellerons ces limites *dérivée normale intérieure* et *dérivée normale extérieure*.

Cela posé, considérons le potentiel V d'une simple couche à densité k répandue sur S.

Soient ds' un élément superficiel de S, k' la valeur de k au point p appartenant à cet élément et R la distance du point P au point p'.

On aura

$$V = \int \frac{k' ds'}{R},$$

l'intégrale étant étendue à la surface S tout entière.

Nous supposerons que la densité k représente une fonction continue sur S [1]. Alors V sera une fonction de x, y, z continue dans l'espace tout entier. D'ailleurs, dans les suppositions que nous avons faites à l'égard de S, cette fonction admettra les deux dérivées normales

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e$$

en tout point p de S.

Pour fixer les idées, nous supposerons que n désigne la direction de la normale *intérieure* par rapport à S, et dans la suite, où nous parlerons de la direction de la normale, nous entendrons par là toujours cette direction, à moins que nous ne disions le contraire.

Cela posé, on sait que

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \displaystyle\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2} - 2\pi k, \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)_e = \displaystyle\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2} + 2\pi k, \end{cases}$$

où φ désigne l'angle que fait la normale au point p considéré (direction n) avec la direction pp' et r la distance pp'.

Donc, si l'on pose

$$\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2} = J,$$

et que l'on considère, par exemple, l'expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{P_i} - J + 2\pi k,$$

---

[1] En disant qu'une fonction quelconque k définie pour les points de S est continue au point p, nous entendons par là la condition que, pour tout nombre positif ε, on peut assigner un autre nombre positif l, tel qu'on ait

$$|k - k'| < \varepsilon,$$

toutes les fois que la distance du point p' au point p ne surpasse pas l. Si cette condition est remplie pour toute position du point p, la fonction k sera *continue sur la surface* S. On sait que le nombre l peut être choisi alors indépendamment de la position du point p.

en supposant que le point P_i tende vers p, cette expression deviendra une quantité infiniment petite.

Dans la suite, nous aurons besoin d'avoir une limite supérieure pour la valeur absolue de cette quantité, et maintenant nous allons la rechercher, en nous restreignant à la supposition que la fonction continue k satisfasse à la condition exprimée par l'inégalité

$$(6) \qquad |k - k'| < N r^{\beta},$$

où N, β désignent des nombres positifs, indépendants de la position des points p, p' auxquels se rapportent les valeurs k, k'.

5. Soient p_0 le point de S, que nous voulons considérer, et $J(p_0)$ la valeur de la fonction J en ce point.

Soit, d'autre part, P_0 un point du domaine E_i se trouvant toujours sur la normale au point p_0.

En désignant la distance $P_0 p_0$ par ζ, la valeur de V au point P_0 sera une fonction de ζ, que nous désignerons par $V(\zeta)$.

La dérivée de cette fonction étant désignée par $V'(\zeta)$, nous aurons à discuter l'expression

$$V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0,$$

où k_0 désigne la densité au point p_0.

Nous nous servirons du système de coordonnées introduit au n° 1 et nous désignerons par x, y, z les coordonnées d'un point p de l'élément superficiel ds. Alors, en posant

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \qquad \sqrt{\rho^2 + z^2} = r_0, \qquad \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2} = R_0,$$

nous aurons

$$V'(\zeta) = \int \frac{k(z - \zeta)\,ds}{R_0^3}, \qquad J(p_0) = \int \frac{k z\,ds}{r_0^3},$$

les intégrations étant étendues à S.

Maintenant concevons un cylindre de révolution C ayant pour axe

l'axe des z (normale au point p_0) et, pour la plus courte distance de ses génératrices à l'axe, une quantité δ, que nous supposerons, eu égard à ce que nous avons remarqué au n° **1**, plus petite que $\frac{1}{2}$ D.

Soient S_0 la portion de S découpée par C au voisinage du point p_0, et S_1 la portion qui reste.

En désignant par $V'_0(\zeta)$, $J_0(p_0)$ les intégrales

$$\int \frac{k(z-\zeta)ds}{R_0^3}, \qquad \int \frac{kz\,ds}{r_0^3}$$

étendues à S_0, et par $V'_1(\zeta)$ la première intégrale étendue à S_1, on aura

$$V'(\zeta) = V'_0(\zeta) + V'_1(\zeta),$$
$$J(p_0) = J_0(p_0) + V'_1(0).$$

Par suite, la quantité

$$|V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0|$$

ne surpassera pas celle-ci

$$|V'_1(\zeta) - V'_1(0)| + |V'_0(\zeta) - J_0(p_0) + 2\pi k_0|.$$

Or, si l'on fixe le nombre δ et que l'on ne considère que des valeurs assez petites de ζ, par exemple celles qui ne surpassent pas $\frac{1}{2}$ D, on pourra évidemment trouver un nombre positif A_1 ne dépendant ni de la position du point p_0, ni de la fonction k, et tel qu'on ait

$$|V'_1(\zeta) - V'_1(0)| < A_1 K\zeta,$$

K étant la plus grande valeur que puisse atteindre sur S la fonction $|k|$.

Donc, il ne reste qu'à discuter l'expression

$$V'_0(\zeta) - J_0(p_0) + 2\pi k_0.$$

Posons

$$\int\left(\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)kz\,ds = P,$$

$$2\pi k_0 - \zeta\int\frac{k\,ds}{R_0^3} = Q,$$

les intégrations étant étendues à S_0.

Nous aurons alors

$$|V_0''(\zeta) - J_0(p_0) + 2\pi k_0| < |P| + |Q|.$$

Nous devons donc évaluer les limites supérieures pour $|P|$ et $|Q|$, ce que nous pouvons faire en nous servant des inégalités obtenues au n° **1**.

Prenons pour variables indépendantes dans les fonctions à intégrer les coordonnées polaires ρ, ψ définies par les équations

$$x = \rho\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\psi.$$

Alors, en désignant par ζ_0 l'angle que fait la normale au point p avec l'axe des z, on aura

$$P = \int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{\delta}\frac{kz}{\cos\zeta_0}\left(\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)\rho\,d\rho.$$

Or, en vertu des inégalités évidentes

$$|R_0 - r_0| < \zeta, \quad R_0 > \rho, \quad r_0 > \rho,$$

on a

$$\left|\frac{1}{R_0^3}-\frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{\zeta}{R_0 r_0}\left(\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{R_0 r_0}+\frac{1}{r_0^2}\right) < \frac{3\zeta}{R_0\rho^3}.$$

D'autre part, en posant

$$\frac{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}{R_0} = T,$$

on trouve

$$T^2 - 1 = \frac{2z(\zeta - z) + z^2}{\rho^2 + (z-\zeta)^2},$$

et, par suite,

$$|T^2 - 1| < \left|\frac{z}{\rho}\right| + \frac{z^2}{\rho^2},$$

quel que soit ζ.

Maintenant supposons, pour fixer les idées, que δ ait été choisi conformément à l'inégalité

$$2a\delta^\alpha < 1.$$

Alors, pour les points de S_0, on aura, en vertu de (2), $|z| < \rho$ et, par suite, $T < 2$.

On aura donc

$$\left|\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{3T\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}} < \frac{6\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}.$$

Cela posé, si l'on se sert des inégalités

$$|z| < 2a\rho^{\alpha+1}, \qquad \cos\tilde{z}_0 > \frac{1}{2},$$

dont la seconde résulte de (4), on trouve

$$|P| < 48\pi K a\zeta \int_0^\delta \frac{\rho^{\alpha-1}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$|P| < 48\pi K a\zeta^\alpha \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Nous avons déjà remarqué que le nombre α ne peut pas surpasser 1. Or, si $\alpha < 1$, l'intégrale qui figure dans cette inégalité ne pourra surpasser, quel que soit ζ, le nombre fixe

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

et, si $\alpha = 1$, on aura une limite supérieure indépendante de ζ pour le produit de cette intégrale par ζ^ε, ε étant une fraction positive fixe qu'on pourra d'ailleurs prendre aussi voisine de zéro qu'on voudra.

On voit donc que, si l'on entend par α_0 un nombre positif fixe satisfaisant aux conditions

$$\alpha_0 < 1, \qquad \alpha_0 \leq \alpha,$$

on aura

$$|P| < A_0 K \zeta^{\alpha_0},$$

A_0 étant une certaine constante ne dépendant ni de la position du point p_0, ni de la fonction k.

Considérons maintenant la quantité Q.

On voit aisément qu'on peut la présenter sous la forme

$$Q = \frac{2\pi k_0 \zeta}{\sqrt{\delta^2 + \zeta^2}} + k_0 \zeta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{T^3}{\cos \mathfrak{z}_0}\right) \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \zeta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta} \frac{(k - k_0) T^3}{\cos \mathfrak{z}_0} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, pour les points de S_0, on a

$$|T^2 - 1| < \left|\frac{z}{\rho}\right| + \frac{z^2}{\rho^2} < 2\left|\frac{z}{\rho}\right| < 4a\rho^{\alpha},$$

et, par suite, puisque $T < 2$,

$$|T^3 - 1| < (T + 1)|T^2 - 1| < 12a\rho^{\alpha}.$$

D'autre part, dans la supposition $2a\delta^{\alpha} < 1$, l'inégalité (4) donne

$$\frac{1}{\cos \mathfrak{z}_0} < 1 + 2a\rho^{\alpha}.$$

Donc, en vertu de l'inégalité évidente

$$|ab - 1| < |a - 1| + |b - 1| + |a - 1||b - 1|,$$

on trouve

$$\left|\frac{T^3}{\cos \mathfrak{z}_0} - 1\right| < 26a\rho^{\alpha}.$$

En se servant de cette inégalité ainsi que de celle-ci

$$\frac{T^3}{\cos \mathfrak{z}_0} < 14,$$

qui en résulte, et en remarquant qu'en vertu de (6)

$$|k - k_0| < N(2\rho)^\beta$$

(puisque, pour les points considérés $r_0 < 2\rho$), on arrive, après une transformation évidente, à l'inégalité

$$|Q| < 2\pi K \frac{\zeta}{\delta} + 52\pi K a \zeta^\alpha \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha+1}dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ 28\pi N(2\zeta)^\beta \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\beta+1}dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, sauf le cas où k est une constante, le nombre β ne peut pas surpasser l'unité. D'ailleurs on peut évidemment supposer toujours $\beta < 1$.

Par suite, en remarquant que les intégrales qui figurent dans cette inégalité sont de la même nature que celle que nous avons rencontrée plus haut, on aura

$$|Q| < A'_0 K \zeta^{\alpha_0} + BN\zeta^\beta,$$

A'_0 et B étant des nombres de la même espèce que A_0 et A_1.

Donc, en rapprochant toutes les inégalités obtenues, on trouve

$$|V'(\zeta) - J(p_0) + 2\pi k_0| < AK\zeta^{\alpha_0} + BN\zeta^\beta,$$

A, B étant des constantes qui ne dépendent ni de la position du point p_0, ni de la fonction k.

Dans le cas que nous avons en vue on aura $\beta < \alpha$, et, par suite, on pourra prendre $\alpha_0 = \beta$.

Alors, en remplaçant p_0 par p et en reprenant les notations du n° **2**, on obtiendra

$$(7) \qquad \left|\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{P_i} - J + 2\pi k\right| < (AK + BN)\zeta^\beta,$$

ζ étant la distance $P_i p$.

4. Comme nous l'avons déjà remarqué, la condition de continuité

de la fonction k assure l'existence des deux dérivées normales

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e,$$

en tout point p de S.

Donc, à cette seule condition, pour chacun des deux domaines E_i, E_e, il existera une limite déterminée pour l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z),$$

lorsque le point $P(x, y, z)$ appartenant à ce domaine tendra à se rapprocher indéfiniment du point p, *en restant toujours sur la normale n.*

Mais supposons maintenant que le point P se rapproche vers p suivant une courbe quelconque.

Pourrait-on affirmer alors l'existence d'une limite pour l'expression ci-dessus? Et, plus généralement, pourrait-on conclure l'existence des limites pour les trois dérivées

$$(8) \qquad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}?$$

On s'assure facilement qu'à la seule condition de continuité de k cette conclusion ne serait pas légitime. Mais, si l'on suppose que la fonction k satisfasse encore à la condition (6), on pourra montrer, ainsi que nous le ferons tout de suite, que les limites dont il s'agit existeront toutes et seront indépendantes du choix de la courbe suivant laquelle le point P se rapproche de p.

Soit p_0 le point de S vers lequel on fera tendre le point P du domaine considéré et soit P_0 un point du même domaine situé sur la normale en p_0.

En désignant les valeurs des dérivées (8) au point P respectivement par $X(P)$, $Y(P)$, $Z(P)$, nous commencerons par démontrer l'existence des limites pour $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$, le point P_0 tendant vers p_0.

Pour le démontrer, en général, il suffit évidemment de le faire dans

une supposition particulière quelconque à l'égard du système de coordonnées.

Prenons donc le système considéré au numéro précédent, le point p_0 étant l'origine et la direction $p_0 P_0$ l'axe des z.

Alors il n'y aura à considérer que les deux expressions $X(P_0)$, $Y(P_0)$ et, d'ailleurs, il suffira d'établir l'existence de la limite pour l'une quelconque d'entre elles, par exemple pour $X(P_0)$.

En reprenant les notations du numéro précédent, nous aurons

$$X(P_0) = \int \frac{kx\,ds}{R_0^3},$$

l'intégrale étant étendue à S.

Introduisons maintenant le cylindre C, que nous y avons défini, et désignons par $X_0(P_0)$, $X_1(P_0)$ les intégrales de la même forme étendues à S_0, S_1.

On aura

$$X(P_0) = X_0(P_0) + X_1(P_0).$$

Or, on voit aisément que, δ étant fixé et ζ étant assez petit (par exemple, plus petit que $\frac{1}{2}D$), on pourra trouver un nombre positif C_1 indépendant de la position du point p_0 et tel qu'on ait

$$|X_1(P_0) - X_1(p_0)| < C_1\zeta.$$

D'autre part, δ étant assez petit, on a

$$X_0(P_0) = \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\delta} \frac{k\rho^2 d\rho}{R_0^3 \cos\xi_0},$$

ce qu'on peut présenter sous la forme

$$X_0(P_0) = k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\delta} \left(\frac{T^3}{\cos\xi_0} - 1\right) \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\delta} \frac{(k - k_0)T^3}{\cos\xi_0} \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, si l'on fait à l'égard de δ les mêmes suppositions qu'au numéro

précédent, on aura, dans le champ d'intégration,

$$\left|\frac{T^3}{\cos\mathfrak{T}_0} - 1\right| < 26 a \rho^\alpha.$$

De là, eu égard à l'inégalité

$$|k - k_0| < N r_0^\beta < 2 N \rho^\beta,$$

on voit immédiatement que, ζ tendant vers zéro, la fonction $X_0(P_0)$ tendra vers une limite déterminée.

D'ailleurs, en désignant cette limite par $X_0(p_0)$, on aura

$$\begin{aligned} X_0(p_0) = k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^\delta \left(\frac{T_0^3}{\cos\mathfrak{T}_0} - 1\right) \frac{d\rho}{\rho} \\ + \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^\delta \frac{(k - k_0) T_0^3}{\cos\mathfrak{T}_0} \frac{d\rho}{\rho}, \end{aligned}$$

T_0 étant la valeur de T pour $\zeta = 0$.

On voit donc que, ζ tendant vers zéro, la fonction $X(P_0)$ tendra vers la limite

$$X_0(p_0) + X_1(p_0)\,(^1),$$

que nous désignerons par $X(p_0)$. D'ailleurs, il est facile de s'assurer qu'elle tendra vers cette limite *uniformément* pour toutes les positions du point p_0.

Pour le montrer, nous remarquons qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} X_0(P_0) - X_0(p_0) = k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^\delta \left(\frac{T^3}{\cos\mathfrak{T}_0} - 1\right) \left[\frac{1}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\rho^3}\right] \rho^2\, d\rho \\ + \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^\delta \frac{k - k_0}{\cos\mathfrak{T}_0} \left(\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) \rho^2\, d\rho \\ + k_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^\delta \frac{T^3 - T_0^3}{\cos\mathfrak{T}_0} \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

---

(1) On peut remarquer que cette limite est la même pour les domaines E_i et E_e.

Or, on a

$$T^2 - T_0^2 = \frac{T^2(2\rho^2 z\zeta + z^2\zeta^2)}{(\rho^2+\zeta^2)(\rho^2+z^2)}$$

et, par suite, puisque dans le champ d'intégration $T < 2$, $a\rho^\alpha < a\delta^\alpha < \frac{1}{2}$, $T_0 < 1$, on trouve

$$|T^2 - T_0^2| < \frac{16a(\rho + a\rho^\alpha\zeta)\rho^\alpha\zeta}{\rho^2+\zeta^2} < \frac{24a\rho^\alpha\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},$$

$$|T^3 - T_0^3| < (T + T_0)|T^2 - T_0^2| < \frac{72a\rho^\alpha\zeta}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}.$$

En se servant de cette inégalité ainsi que de celles-ci

$$\left|\frac{T^3}{\cos\mathfrak{T}_0} - 1\right| < 26a\rho^\alpha, \qquad |k - k_0| < 2N\rho^\beta, \qquad \cos\mathfrak{T}_0 > \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{2\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}, \qquad \left|\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < \frac{6\zeta}{\rho^3\sqrt{\rho^2+\zeta^2}},$$

on parvient à la suivante :

$$|X_0(P_0) - X_0(p_0)| < 392\pi K a\zeta^\alpha \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{x^2+1}} + 48\pi N\zeta^\beta \int_0^{\frac{\delta}{\zeta}} \frac{x^{\beta-1}dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

et, de là, si $\beta < \alpha$, on conclut

$$|X_0(P_0) - X_0(p_0)| < C_0\zeta^\beta,$$

C_0 étant un nombre de la même espèce que C_1.

Donc, en désignant par C un nombre positif convenablement choisi et indépendant de la position du point p_0, on aura

$$|X(P_0) - X(p_0)| < C\zeta^\beta$$

pour toutes les valeurs de ζ qui ne surpassent pas une certaine limite fixe (par exemple, pour $\zeta < \frac{1}{2}D$); et cette inégalité prouve bien l'exactitude de notre affirmation.

Maintenant reportons-nous à un système de coordonnées quelconque.

D'après ce que nous venons de montrer et ce que nous avons montré au numéro précédent, nous pouvons affirmer que, la distance ζ du point P_0 au point p_0 tendant vers zéro, les quantités $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$ tendront vers certaines limites (en général, différentes pour les domaines E_i et E_e), et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Ces limites, que nous pouvons désigner, ne considérant qu'un seul des deux domaines E_i, E_e, par $X(p_0)$, $Y(p_0)$, $Z(p_0)$, représenteront certaines fonctions du point p_0, et il est facile de voir que ces fonctions seront continues sur S.

En effet, les expressions $X(P_0)$, $Y(P_0)$, $Z(P_0)$, si l'on y donne à ζ une valeur fixe suffisamment petite (par exemple, plus petite que $\frac{1}{2}D$), deviendront des fonctions du point p_0 continues sur S et, comme, pour $\zeta = 0$, elles tendent *uniformément* vers les fonctions $X(p_0)$, $Y(p_0)$, $Z(p_0)$, on en conclut immédiatement la continuité de ces dernières.

Cela étant établi, concevons, outre le point p_0, un autre point p de S et un point P du domaine considéré situé sur la normale en p.

Soient ζ la distance pP et r_0 la distance pp_0.

Quelle que soit la position du point p, nous pouvons prendre ζ assez petit pour que les différences

$$X(P) - X(p), \qquad Y(P) - Y(p), \qquad Z(P) - Z(p)$$

soient aussi petites en valeurs absolues qu'on voudra et, d'autre part, les fonctions $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ étant continues sur S, on peut prendre r_0 assez petit pour que les différences

$$X(p) - X(p_0), \qquad Y(p) - Y(p_0), \qquad Z(p) - Z(p_0)$$

soient aussi voisines de zéro qu'on voudra.

Donc, on pourra prendre ζ et r_0 suffisamment petits pour qu'on ait

$$|X(P) - X(p_0)| < \varepsilon, \qquad |Y(P) - Y(p_0)| < \varepsilon,$$
$$|Z(P) - Z(p_0)| < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre ε.

On a donc bien

$$\lim X(P) = X(p_0), \qquad \lim Y(P) = Y(p_0), \qquad \lim Z(P) = Z(p_0),$$

indépendamment de la loi suivant laquelle le point P se rapproche de p_0.

3. L'intégrale J qui figure dans l'expression de $\frac{\partial V}{\partial n}$ jouera dans la suite un rôle considérable, et nous nous arrêterons maintenant sur une de ses propriétés.

Il est facile de montrer que, k étant une fonction quelconque, intégrable sur S (et par suite limitée), cette intégrale représentera une fonction continue sur S, de sorte que, si l'on désigne par J′ la valeur de J au point p' et par r la distance de ce point au point p, la différence J′ — J deviendra infiniment petite, toutes les fois que r tendra vers zéro.

Mais il y a plus : on peut montrer que cette différence n'est jamais de l'ordre infiniment petit par rapport à r.

Pour établir ce point, qui est d'une grande importance pour ce qui va suivre, il faut montrer que, β étant un certain nombre positif fixe, on peut assigner au rapport

$$\frac{|J' - J|}{r^\beta}$$

une limite supérieure indépendamment de la position des points p, p'.

La recherche de la limite supérieure exacte des valeurs de β, satisfaisant à cette condition, serait un problème assez difficile, et nous nous contenterons de signaler une quelconque de ces valeurs de β, ce qui nous suffira complètement dans notre étude.

Soient p_0 et p_1 les deux points considérés de S dont la distance mutuelle sera désignée par r.

En entendant par p un point de l'élément superficiel ds, nous désignerons par r_0 et φ_0 la distance p_0p et l'angle que fait la normale au point p_0 avec la direction p_0p. Pareillement, par r_1 et φ_1 seront désignés la distance p_1p et l'angle de la normale au point p_1 avec la direc-

tion $p_1 p$. Alors, pour les valeurs de J aux points p_0, p_1, on aura

$$J(p_0) = \int \frac{k \cos \varphi_0 \, ds}{r_0^2}, \qquad J(p_1) = \int \frac{k \cos \varphi_1 \, ds}{r_1^2},$$

les intégrales étant étendues à S, et nous aurons à évaluer, en fonction de r, une limite supérieure pour

$$|J(p_1) - J(p_0)|.$$

Nous introduirons de nouveau le cylindre C, considéré au n° 3, ayant pour axe la normale au point p_0, et nous désignerons par $J_0(p_0)$, $J_0(p_1)$ les intégrales ci-dessus étendues à S_0 et par $J_1(p_0)$, $J_1(p_1)$ ces intégrales étendues à S_1.

En posant

$$J_1(p_1) - J_1(p_0) = \Delta,$$

et en remarquant que

$$|J(p_1) - J(p_0)| < |J_0(p_0)| + |J_0(p_1)| + |\Delta|,$$

nous chercherons les limites supérieures des trois termes du second membre en fonction de δ et r, sauf à établir ensuite une certaine dépendance entre ces deux quantités.

Dans cette recherche, nous supposerons $r < \delta$.

Commençons par les deux premiers termes.

Pour évaluer leurs limites supérieures, nous considérerons, d'une manière générale, l'intégrale

$$J_s(p_0) = \int_{(S)} \frac{k \cos \varphi_0 \, ds}{r_0^2}$$

étendue à une portion quelconque s de S, dans laquelle r_0 ne surpasse pas une quantité assez petite l.

Nous nous servirons du système de coordonnées et des notations du n° 3. Nous aurons alors

$$J_s(p_0) = \int_s \frac{k z \, ds}{r_0^3},$$

et, en supposant l assez petit pour qu'on puisse se servir des inégalités

$$|z| < 2a\rho^{\alpha-1}, \qquad \cos\zeta_0 > \frac{1}{2},$$

nous en déduirons

$$|J_s(p_0)| < 4aK\int_{s)} \rho^{\alpha-2}\cos\zeta_0\, ds.$$

Par suite, à plus forte raison,

$$|J_s(p_0)| < 4aK\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^l \rho^{\alpha-1}\, d\rho = \frac{8\pi}{\alpha} K a l^\alpha.$$

Maintenant, pour obtenir les limites cherchées, il n'y a qu'à remarquer que dans les intégrales $J_0(p_0)$, $J_0(p_1)$

$$r_0 < 2\delta, \qquad r_1 < r + r_0 < 3\delta.$$

On a donc, δ étant assez petit,

$$|J_0(p_0)| < \frac{16\pi}{\alpha} K a \delta^\alpha, \qquad |J_0(p_1)| < \frac{24\pi}{\alpha} K a \delta^\alpha.$$

Considérons maintenant le troisième terme.

Nous supposerons que δ ne surpasse pas une quantité fixe δ_0 satisfaisant aux inégalités

$$\delta_0 < \frac{1}{2} D, \qquad 2a\delta_0^\alpha < 1,$$

et nous désignerons par Δ_0 la valeur de Δ pour $\delta = \delta_0$.

On aura

$$|\Delta| < |\Delta - \Delta_0| + |\Delta_0|,$$

$$\Delta - \Delta_0 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_\delta^{\delta_0} \left(\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right) \frac{k\rho\, d\rho}{\cos\zeta_0}.$$

Or, ζ étant l'angle fait par la normale au point p_1 avec celle du

point p_0 et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point p_1, on a

$$r_1 \cos \varphi_1 = \left[z - z_1 - (x - x_1) \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - (y - y_1) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \right] \cos \zeta.$$

Par suite, puisque $r_0 \cos \varphi_0 = z$, on aura

$$\begin{aligned} &|r_1 \cos \varphi_1 - r_0 \cos \varphi_0| \\ &\quad < |z|(1 - \cos \zeta) + |z_1| + \left| (x - x_1) \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \right|. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} &\left| (x - x_1) \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \right| \\ &\quad < \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)^2}, \end{aligned}$$

et, en vertu des inégalités (2), (3), (4), on a

$$|z_1| < 2a\delta_0 r^\alpha, \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)^2} < 4ar^\alpha, \qquad 1 - \cos \zeta < 2ar^\alpha.$$

Donc, en remarquant que dans le champ de l'intégration

$$|z| < \delta_0, \qquad \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < 2\delta_0,$$

il vient

$$|r_1 \cos \varphi_1 - r_0 \cos \varphi_0| < 12a\delta_0 r^\alpha.$$

D'autre part, puisque

$$|r_1 - r_0| < r, \qquad r_0 > \rho, \qquad r_1 > r_0 - r > \rho - r,$$

et que dans le champ d'intégration $\rho - r > 0$, on trouve

$$\left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| < \frac{r}{r_1 r_0} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_0} + \frac{1}{r_0^2} \right) < \frac{3r}{r_1 \rho (\rho - r)^2}.$$

Supposons que $r < \frac{1}{2}\delta$. Alors cette inégalité donnera

$$\left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right| < \frac{12r}{r_1 \rho^3},$$

et puisque

$$\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_1 \cos\varphi_1 + \frac{r_1\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0}{r_0^3},$$

on aura, dans le champ d'intégration,

$$\left|\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} - \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| < \frac{12\,r}{\rho^3} + \frac{12\,a\,\delta_0\,r^\alpha}{\rho^3}.$$

Par suite, en remarquant que le second membre ne surpasse pas la quantité

$$\frac{12\,(\delta_0^{1-\alpha} + a\,\delta_0)\,r^\alpha}{\rho^3} < \frac{18\,\delta_0^{1-\alpha}\,r^\alpha}{\rho^3},$$

et que dans la fonction à intégrer $\cos\tilde{\varphi}_0 > \frac{1}{2}$, on trouve

$$|\Delta - \Delta_0| < 72\,\pi\,\delta_0^{1-\alpha}\,\mathrm{K}\,\frac{r^\alpha}{\delta}.$$

D'autre part, il est évident qu'il y aura un nombre fixe H'_0 ne dépendant pas de la fonction k et tel qu'on ait

$$|\Delta_0| < \mathrm{H}'_0\,\mathrm{K}\,r^\alpha.$$

Donc, pour un autre nombre H' de la même nature, on aura

$$|\Delta| < \mathrm{H}'\mathrm{K}\,\frac{r^\alpha}{\delta}.$$

De tout cela, on conclut qu'on aura une inégalité de la forme

$$|\mathrm{J}(p_1) - \mathrm{J}(p_0)| < \mathrm{H}\,\mathrm{K}\,\frac{r^\alpha}{\delta} + \mathrm{H}'\mathrm{K}\,\delta^\alpha,$$

H, H' étant des nombres ne dépendant ni de la position des points considérés, ni de la fonction k, ni de δ, et, par la nature même de cette inégalité, on voit qu'elle aura lieu non seulement dans les suppositions que nous avons faites pour l'obtenir, mais encore quels que

soient r et δ, pourvu qu'on prenne pour H′ et H″ des nombres assez grands.

Maintenant, posons

$$\delta = cr^{\gamma},$$

en entendant par c une constante positive quelconque et en supposant $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$.

Alors notre inégalité deviendra

$$|J(p_1) - J(p_0)| < \left(H' \frac{1}{c} + H'' c^{\alpha}\right) K r^{\beta},$$

avec cette valeur pour β

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1},$$

et c'est le résultat cherché.

En remplaçant p_0, p_1 par p, p' et en reprenant les notations introduites au début du numéro présent, nous le présenterons sous la forme

$$(9) \qquad |J' - J| < HK r^{\beta},$$

H étant un nombre positif ne dépendant ni de la position des points p, p', ni de la fonction k.

6. Comme nous l'avons déjà dit, outre les potentiels des simples couches, nous aurons à considérer aussi ceux des doubles couches.

Par le potentiel, au point P, d'une double couche à densité (ou à moment) μ on entend, comme on sait, l'intégrale

$$W = \int \frac{\mu' \cos \Phi' \, ds'}{R^2},$$

dans laquelle Φ' désigne l'angle que fait la normale au point p' de l'élément ds' avec la direction $p'P$, R la distance $p'P$ et μ' la valeur de μ au point p'.

Nous supposerons que μ est une fonction continue sur la surface S à laquelle s'étend l'intégration.

A cette condition W représentera une fonction des coordonnées x, y, z du point P parfaitement déterminée dans tout l'espace. Mais cette fonction, tout en restant continue, tant que le point P ne se trouve pas sur S, varie brusquement, lorsque ce point vient à traverser la surface en un point quelconque p.

Soient φ', r ce que deviennent Φ', R, lorsque le point P se trouve en p, et

$$w = \int \frac{\mu' \cos\varphi'}{r^2} ds'.$$

Alors w représentera ce qu'on peut appeler la *valeur directe* de W au point p, valeur qui diffère, en général, des valeurs limites w_i et w_e qu'on obtient en supposant que le point P se rapproche indéfiniment vers p, en restant toujours, soit dans le domaine E_i, soit dans le domaine E_e.

On a, en effet, comme on sait,

$$(10) \qquad \begin{cases} w_i = w + 2\pi\mu, \\ w_e = w - 2\pi\mu. \end{cases}$$

On peut remarquer que, μ étant continue, w et, par suite aussi, w_i, w_e représenteront des fonctions continues sur S.

Maintenant, supposant que le point P se trouve sur la normale n au point p, considérons l'expression

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_p,$$

qui se présentera dans notre étude dans la supposition que la distance ζ du point P au point p soit assez petite.

Il est bien clair que la seule condition de continuité de la fonction μ ne suffit pas encore pour assurer l'existence d'une limite pour l'expression ci-dessus, ζ tendant vers zéro.

Donc la dérivée normale de la fonction W n'existe que sous certaines conditions complémentaires, et de pareilles conditions seront indiquées dans la suite.

Mais à présent nous n'admettrons que les suppositions déjà faites, et, en restant dans ces généralités, nous nous bornerons à montrer que, ζ étant assez petit, il existe une limite supérieure pour le produit

$$\zeta\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P\right|,$$

ce qui suffira pour la recherche que nous avons en vue.

En entendant par $\tilde{\omega}$ l'angle des deux normales aux points p et p' et par Φ l'angle de la normale n au point p avec la direction Pp', on aura

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \int(\cos\tilde{\omega} + 3\cos\Phi\cos\Phi')\frac{\mu' ds'}{R^3}.$$

Par suite, il vient

$$\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P\right| < 4M\int\frac{ds'}{R^3},$$

M étant la plus grande valeur sur S de la fonction $|\mu|$.

Or l'intégrale qui figure ici est bien connue, et l'on sait que, ζ étant assez petit, on peut assigner une limite supérieure pour le produit

$$\zeta\int\frac{ds'}{R^3}.$$

D'ailleurs, si le rapport de ζ à D ne surpasse pas une fraction fixe, par exemple, $\frac{1}{2}$, cette limite pourra être choisie indépendamment de la position du point p.

Donc, pour de pareilles valeurs de ζ, on aura une inégalité de la forme

$$\left|\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P\right| < G\frac{M}{\zeta}, \tag{11}$$

G étant une constante ne dépendant ni de la position du point p, ni de la fonction μ.

7. Soit v_0 une fonction donnée définie pour les points de S de manière à être intégrable sur cette surface (et, par suite, limitée).

Supposons qu'en partant de cette fonction on ait formé la suite indéfinie de fonctions

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots,$$

liées par les équations de la forme

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos\varphi' \, ds'}{r^2},$$

où m est un nombre de la suite 1, 2, 3, ..., et v'_{m-1} la valeur de la fonction v_{m-1} au point p'.

On sait que cette suite de fonctions joue un rôle très important dans les méthodes qu'a proposées M. Neumann pour les divers problèmes se rattachant à l'équation de Laplace.

On sait, en effet, que ces méthodes sont fondées sur le principe suivant, que nous appellerons *principe de Neumann :*

Quelle que soit la fonction v_0, il existe une constante C, telle que, pour tous les points de S et pour toutes les valeurs de m, on ait

$$|v_m - C| < L\lambda^m, \tag{12}$$

L, λ étant des constantes positives indépendantes du nombre m, et λ *représentant un nombre qui est plus petit que* 1 *et ne dépend point de la fonction* v_0.

C'est encore sur ce principe que nous allons nous appuyer dans notre recherche.

Comme on le sait, la première démonstration de ce principe est due à M. Neumann, qui a imaginé, à cet effet, une méthode spéciale devenue maintenant classique.

Cette méthode ne s'applique qu'aux surfaces convexes. Mais c'est un cas assez général où elle peut servir à démontrer le principe en toute rigueur, du moins dans les suppositions qui sont ici admises.

C'est pourquoi, dans ma Note des *Comptes rendus* (22 novembre 1897), je me suis borné à la supposition que la surface considérée soit convexe.

Toutefois, pour l'exactitude du principe, cette supposition n'est nullement nécessaire. On sait, en effet, par les dernières recherches de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XX), que le principe de Neumann peut bien être exact aussi pour certaines surfaces non convexes.

D'ailleurs, de cette supposition elle-même, l'analyse qu'on trouvera ici sera entièrement indépendante, et tout ce qui va suivre sera applicable non seulement aux surfaces convexes, mais encore à toute surface qui satisfait aux conditions du n° **1** et pour laquelle on réussit à démontrer le principe en question.

Par cette raison, à présent, au lieu de supposer que la surface S soit convexe, nous supposerons, plus généralement, que le principe de Neumann soit applicable.

C'est en cela que consistera la supposition que nous avions encore à faire, ainsi que nous l'avons mentionné au n° **1**.

Après ces préliminaires, abordons notre étude.

CHAPITRE II.

PROBLÈME FONDAMENTAL DE L'ÉLECTROSTATIQUE.

8. Nous ne considérerons que le cas d'un conducteur unique d'étendue finie et limité par une seule surface fermée S à l'égard de laquelle nous ferons les suppositions énoncées au n° **1**.

Supposons que notre conducteur soit chargé d'une quantité donnée d'électricité, et qu'il soit ensuite soustrait à toute influence extérieure.

On sait que, si l'équilibre est possible, l'électricité se distribuera à la surface S avec une densité k, telle que l'intégrale

$$V = \int \frac{k' ds'}{R},$$

représentant, avec les notations déjà définies (n° **2**), le potentiel de la

couche électrique, conservera une valeur constante C dans toute l'étendue du conducteur.

Donc, pour démontrer la possibilité du problème qui nous occupe, on doit établir l'existence d'une fonction k satisfaisant à la condition ci-dessus et conduisant à la valeur donnée pour l'intégrale

$$\int k\,ds \quad (^1).$$

On peut remarquer que cette fonction, si toutefois elle est continue, satisfait à l'équation

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\psi\, ds}{r^2} \tag{13}$$

qui découle immédiatement de la première des formules (5).

Réciproquement, toute solution continue de cette équation conduit à une valeur constante de l'intégrale

$$\int \frac{k'\,ds'}{R}$$

dans toute l'étendue du conducteur. Donc, si cette solution n'est pas identiquement nulle, elle donnera une solution du problème considéré.

On sait que, dans les Traités de l'Électrostatique, on propose le théorème d'après lequel, *le problème considéré étant possible, il n'en peut exister qu'une seule solution.*

Il va sans dire que ce théorème n'est exact qu'avec certaines restrictions.

Si l'on ne veut admettre pour k que des solutions *continues*, on peut

(1) Nous désignerons l'élément superficiel tantôt par ds, tantôt par ds', et le point variable appartenant à cet élément sera désigné par p dans le premier cas et par p' dans le second. En même temps, considérant une fonction d'un seul point de S et désignant sa valeur au point p par f, nous désignerons sa valeur en p' par f'.

le démontrer, par des méthodes connues, en toute rigueur. Mais, si l'on ne faisait pas cette restriction, on ne pourrait démontrer le théorème qu'en précisant d'avance la manière dont se comporte la fonction k aux lieux de discontinuité.

Nous ne nous arrêterons pas sur ce point, puisque, dans la suite, nous ne considérerons que des solutions continues.

Aussi bornons-nous à citer la proposition suivante :

L'équation (13) *avec la condition*

$$\int k\,ds = \text{quantité donnée}$$

ne peut admettre qu'une seule solution continue.

9. Reprenons la suite de fonctions

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots,$$

définie au n° **7**.

Les deux fonctions consécutives de cette suite étant liées par l'équation

$$v_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\varphi' ds'}{r^2},$$

toutes ces fonctions seront parfaitement déterminées, si l'on donne v_0.

Mais à présent, au lieu de donner directement cette fonction, nous la définirons par la formule

$$v_0 = \int \frac{k'_0\,ds'}{r},$$

k_0 étant une fonction donnée que nous supposerons non seulement continue sur S, mais encore vérifiant la condition analogue à celle (6),

$$(14) \qquad |k_0 - k'_0| < N_0 r^{\beta_0},$$

où N_0, β_0 désignent des nombres positifs indépendants de la position des points p, p'.

Les fonctions ci-dessus ne sont définies que pour les points de la surface S. Mais, en partant de ces fonctions, on peut construire une autre suite de fonctions

$$V_0, \quad V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots$$

définies pour tous les points de l'espace E_i intérieur à cette surface.

Nous définirons ces fonctions par la condition qu'elles représentent, pour le domaine E_i, les solutions du problème de Dirichlet se réduisant sur S respectivement aux fonctions

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots.$$

Alors nous aurons

$$V_0 = \int \frac{k'_0\, ds'}{R},$$

et, en vertu de la première des formules (10), il viendra

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos \Phi'\, ds'}{R^2} - V_{m-1}. \tag{15}$$

Par cette formule, en y faisant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, on déterminera, de proche en proche, toutes les fonctions V_m.

Maintenant supposons que, pour la surface considérée, on ait réussi à démontrer le principe de Neumann.

On aura alors l'inégalité (12), et comme, d'après le théorème connu, toutes les valeurs de la fonction V_m se trouvent entre la plus petite et la plus grande des valeurs de la fonction v_m, on aura aussi

$$|V_m - C| < L\lambda^m$$

pour tous les points du domaine E_i.

De là, puisque $\lambda < 1$, on voit que, m croissant indéfiniment, la fonction V_m tendra vers la constante C.

Or, nous verrons tout de suite que la fonction V_m peut être présentée sous la forme

$$V_m = \int \frac{k'_m\, ds'}{R} \tag{16}$$

du potentiel d'une simple couche répandue sur S à densité k_m continue sur cette surface.

Donc, si l'on parvient à démontrer que, m croissant indéfiniment, cette densité tend uniformément vers une limite qui ne soit pas identiquement nulle, la possibilité du problème électrostatique sera établie, puisque cette limite représentera une fonction k pour laquelle l'intégrale

$$\int \frac{k' ds'}{R}$$

conservera une valeur constante dans le domaine E_i, et quant à la condition

$$\int k\, ds = \text{quantité donnée},$$

on pourra toujours y satisfaire par un choix convenable de la fonction k_0.

10. Pour démontrer la formule (16), supposons qu'on ait déjà trouvé

$$V_{m-1} = \int \frac{k'_{m-1}\, ds'}{R},$$

et que la densité k_{m-1} de ce potentiel satisfasse à la condition

$$|k_{m-1} - k'_{m-1}| < N_{m-1} r^{\beta_{m-1}},$$

N_{m-1}, β_{m-1} étant des nombres positifs indépendants de la position des points p, p'.

Alors, comme nous l'avons vu au n° **4**, les dérivées

$$\frac{\partial V_{m-1}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V_{m-1}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V_{m-1}}{\partial z}$$

seront déterminées et continues dans le domaine E_i, *jusqu'à la surface* S.

Par suite, nous pourrons appliquer à la fonction V_{m-1} la formule

comme de Green, qui donnera

$$V_{m-1} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\Phi' ds'}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}\frac{ds'}{R},$$

$\frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}$ étant la valeur au point p' de la dérivée normale intérieure de la fonction V_{m-1}.

Or, en vertu de cela, la formule (15) se réduira à

$$V_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'_{m-1}}{\partial n'}\frac{ds'}{R} + V_{m-1},$$

ce qui se présentera sous la forme (16), si l'on pose

$$k_m = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial V_{m-1}}{\partial n} + k_{m-1}.$$

D'ailleurs, en vertu de (5), cette expression de k_m prendra la forme

$$(17) \qquad k_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k'_{m-1}\cos\varphi\, ds'}{r^2},$$

d'où l'on voit, en vertu de ce qui a été montré au n° 3, qu'on aura

$$(18) \qquad |k_m - k'_m| < N_m r^{\beta_m},$$

N_m, β_m étant des nombres de la même espèce que N_{m-1}, β_{m-1}.

Donc, la formule (16) et l'inégalité (18) étant exactes pour une valeur quelconque de m, elles le seront aussi pour la valeur plus grande d'une unité.

Or, la fonction V_0 a déjà la forme (16) avec la condition (14), que nous avons admise.

Par suite, la formule (16) et la continuité de la fonction k_m se trouvent démontrées.

D'ailleurs nous avons obtenu la formule (17), qui permet de calculer les k_m, en partant de k_0.

Remarquons que cette formule fait voir, tout indépendamment du

principe de Neumann, que, dans notre recherche, il suffira d'établir l'existence de la limite k pour k_m et l'uniformité de convergence vers cette limite. Il résulte, en effet, de la formule (17) que cette limite satisfera nécessairement à l'équation (13).

Remarquons encore que pour satisfaire à l'équation

$$\int k\,ds = g,$$

g étant la charge donnée du conducteur, il n'y aura qu'à prendre, pour k_0, une fonction vérifiant l'équation

$$\int k_0\,ds = g.$$

On a, en effet, en vertu de (17),

$$\int k_m\,ds = \int k_{m-1}\,ds'$$

et, par suite,

$$\int k_m\,ds = \int k_0\,ds,$$

quel que soit m.

Cela posé, nous allons établir l'existence de la limite k, en nous appuyant sur le principe de Neumann.

11. Tout d'abord, il est facile de s'assurer que la fonction V_m peut être présentée sous forme de potentiel d'une double couche répandue sur S.

A cet effet, on remarquera qu'en vertu de (12) la série

$$(v_m - v_{m+1}) + (v_{m+2} - v_{m+3}) + (v_{m+4} - v_{m+5}) + \ldots$$

est convergente et, d'ailleurs, uniformément pour tous les points de S.

La série considérée définit donc une certaine fonction, et, ses termes étant continus sur S, cette fonction le sera aussi en vertu de l'uniformité de convergence.

En désignant cette fonction par μ_m, posons

$$(19) \qquad W_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu'_m \cos\Phi' ds}{R^2}.$$

Alors W_m représentera une certaine fonction harmonique dans le domaine E_i, et cette fonction, en vertu de (10), se réduira sur S à

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\mu'_m \cos\sigma' ds'}{r^2} + \mu_m.$$

Or, le premier terme de cette expression, en vertu de la formule

$$(20) \qquad \mu_m = (v_m - v_{m+1}) + (v_{m+2} - v_{m+3}) + \ldots$$

et des équations par lesquelles sont liées les v_m, est égal à

$$(v_{m-1} - v_{m-2}) + (v_{m-3} - v_{m+4}) + \ldots = v_m - \mu_m - C.$$

Donc la fonction W_m se réduit sur S à

$$v_m - C,$$

et, par suite, on a

$$(21) \qquad V_m = W_m + C$$

pour tous les points du domaine E_i. C'est ce que donne, d'ailleurs, immédiatement la méthode connue de Neumann.

Cela posé, prenons un point quelconque p de S et un point P du domaine E_i situé sur la normale n en p. Puis, en supposant que la distance $\zeta = Pp$ soit assez petite (par exemple, plus petite que $\frac{1}{2}$ D), considérons les expressions

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial n}\right)_P \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial W_m}{\partial n}\right)_P$$

V_m, W_m étant définies par les formules (16) et (19).

Soit K_m une limite supérieure quelconque de la fonction $|k_m|$.

En vertu de (9) et de (17), on aura

$$|k_m - k'_m| < \mathrm{HK}_{m-1}\rho^{\beta},$$

H étant indépendant du nombre m et de la position des points p, p' et β étant défini par la formule

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}.$$

Par suite, l'inégalité (7) donnera

$$\left|\left(\frac{\partial \mathrm{N}_m}{\partial n}\right)_p - 2\pi(k_{m+1} - k_m)\right| < (\mathrm{AK}_m + \mathrm{BK}_{m-1})\zeta^{\beta},$$

A, B étant des nombres de la même espèce que H, et de là on déduit

$$2\pi|k_{m+1} - k_m| < (\mathrm{AK}_m + \mathrm{BK}_{m-1})\zeta^{\beta} + \left|\left(\frac{\partial \mathrm{N}_m}{\partial n}\right)_p\right|.$$

D'autre part, en vertu de (12), on a

$$|v_m - v_{m+1}| < \mathrm{L}(\lambda^m + \lambda^{m+1})$$

et, par suite, (20) donne

$$|\mu_m| < \frac{\mathrm{L}}{1 - \lambda}\lambda^m.$$

On aura donc, en vertu de (11),

$$\left|\left(\frac{\partial \mathrm{W}_m}{\partial n}\right)_p\right| < \mathrm{G}\frac{\lambda^m}{\zeta},$$

G étant une constante ne dépendant ni du nombre m, ni de la position du point p.

Or, en vertu de (21),

$$\left(\frac{\partial \mathrm{W}_m}{\partial n}\right)_p = \left(\frac{\partial \mathrm{N}_m}{\partial n}\right)_p.$$

Par suite, on a

$$2\pi|k_{m+1} - k_m| < (\mathrm{AK}_m + \mathrm{BK}_{m-1})\zeta^{\beta} + \mathrm{G}\frac{\lambda^m}{\zeta}.$$

et cette inégalité, où le premier membre ne dépend point de ζ, sera encore exacte, si l'on y pose

$$\zeta = c\lambda^{\frac{m}{1+\beta}},$$

c étant un nombre positif quelconque.

Donc, en posant

$$\lambda^{\frac{\beta}{1+\beta}} = \lambda_1,$$

on aura une inégalité de la forme

$$(22) \qquad |k_{m+1} - k_m| < (l + q' K_m + q'' K_{m-1})\lambda_1^m,$$

l, q', q'' étant des nombres positifs qui ne dépendent ni du nombre m, ni de la position du point p.

De cette inégalité il vient

$$|k_{m+1}| < |k_m| + (l + q' K_m + q'' K_{m-1})\lambda_1^m,$$

d'où l'on voit qu'à partir de $m = 1$ on peut admettre

$$K_{m+1} = K_m + (l + q' K_m + q'' K_{m-1})\lambda_1^m.$$

Mais alors, à partir de la même valeur de m, on aura $K_{m+1} > K_m$ et, par suite, en posant $q' + q'' = q$, il viendra

$$K_{m+1} < (1 + q\lambda_1^m)K_m + l\lambda_1^m.$$

Cette inégalité aura lieu à partir de $m = 2$. Mais, en choisissant convenablement K_0 et K_1, on pourra l'admettre à partir de $m = 0$.

Alors, en remarquant qu'elle peut être écrite ainsi :

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < (1 + q\lambda_1^m)\left(K_m + \frac{l}{q}\right),$$

on en déduira

$$K_{m+1} + \frac{l}{q} < \left(K_0 + \frac{l}{q}\right)(1+q)(1+q\lambda_1)(1+q\lambda_1^2)\ldots(1+q\lambda_1^m).$$

Or, λ_1 est plus petit que 1. Par suite, le produit infini

$$(1+q)(1+q\lambda_1)(1+q\lambda_1^2)(1+q\lambda_1^3)\ldots$$

est convergent et, si l'on désigne sa valeur par Q, l'inégalité ci-dessus donnera

$$K_{m+1}+\frac{l}{q}<\left(K_0+\frac{l}{q}\right)Q.$$

Donc le nombre K_m, quel que soit m, reste au-dessous de

$$\left(K_0+\frac{l}{q}\right)Q-\frac{l}{q},$$

en vertu de quoi l'inégalité (22) permet de conclure la suivante :

$$(23)\qquad |k_{m+1}-k_m|<L_1\lambda_1^m,$$

où

$$L_1=(l+qK_0)Q.$$

De là, on voit que la série

$$(24)\qquad k_0+(k_1-k_0)+(k_2-k_1)+(k_3-k_2)+\ldots$$

converge. D'ailleurs, L_1 et λ_1 étant indépendants de la position du point p, sa convergence est uniforme pour tous les points de S.

Donc, cette série définit une fonction k parfaitement déterminée sur S et, comme la somme de ses $m+1$ premiers termes est égale à k_m, on voit que, m croissant indéfiniment, k_m tendra uniformément vers k.

C'est ce que nous avons voulu démontrer.

12. La fonction k, comme cela résulte de sa définition par la série (24), est continue en tous les points de S. D'ailleurs, en vertu de (17), k_m tendant *uniformément* vers k, cette fonction vérifie l'équation (13).

Nous avons donc démontré que, dans le cas des surfaces que nous

considérons ici, les équations

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\zeta\, ds'}{r^2}, \qquad \int k\, ds = g,$$

g étant une quantité donnée quelconque, admettent toujours une solution continue et, comme nous l'avons déjà remarqué, elles n'en admettent qu'une seule.

En même temps, nous avons établi que cette solution peut être obtenue par la méthode suivante :

On prendra une fonction quelconque k_0, limitée et vérifiant la condition

$$\int k_0\, ds = g.$$

Puis, en partant de cette fonction, on construira une suite indéfinie de fonctions

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad k_4, \quad \ldots,$$

qu'on déterminera successivement par la formule

$$k_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k'_{m-1} \cos\zeta\, ds'}{r^2},$$

et la solution cherchée s'obtiendra comme la limite de k_m, lorsque m croîtra indéfiniment [1].

C'est en cela que consiste la méthode proposée par M. Robin pour résoudre le problème considéré.

Le principe d'où découle cette méthode consiste en ce que les fonctions k_m satisfont à l'inégalité

$$|k_{m+1} - k_m| < L_1 \lambda_1^m,$$

---

[1] Dans la démonstration, nous avons imposé à k_0 une certaine restriction, à savoir, que cette fonction satisfasse à l'inégalité (17). Mais on remarque tout de suite qu'on peut s'en affranchir. En effet, quelle que soit la fonction k_0, pourvu qu'elle soit intégrable (et, par suite, limitée), la fonction k_1 satisfera à l'inégalité (18) et, par conséquent, pourra jouer le rôle de k_0 dans la démonstration.

où L_1, λ_1 sont des constantes positives indépendantes du nombre m et, d'ailleurs, λ_1 est plus petit que 1 et ne dépend point de la fonction k_0.

Nous venons de montrer que, pour les surfaces satisfaisant aux conditions du n° **1**, ce principe est une conséquence nécessaire du principe de Neumann.

15. Le cas où l'on a

$$\int k_0\, ds = 0$$

mérite une attention particulière.

Dans ce cas, la fonction continue k, à laquelle conduit la méthode ci-dessus, satisfera aux équations

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2}, \qquad \int k\, ds = 0$$

et, par suite, sera identiquement nulle.

Or, cette fonction représente la valeur de la série

$$k_m + (k_{m+1} - k_m) + (k_{m+2} - k_{m+1}) + \ldots.$$

On aura donc

$$k_m = (k_m - k_{m+1}) + (k_{m+1} - k_{m+2}) + \ldots$$

et, de là, en vertu de (23), on conclura

$$|k_m| < \frac{L_1}{1 - \lambda_1}\lambda_1^m.$$

Donc, dans le cas considéré, la série

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$$

sera absolument et uniformément convergente, et sa convergence sera plus forte que celle d'une progression géométrique de raison λ_1.

14. Reprenons le problème électrostatique.

Par l'équation (13), à laquelle satisfait la densité k, on voit que cette fonction satisfera à la condition (6), si l'on y pose

$$\beta = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}.$$

Donc, en vertu de ce qui a été montré au n° **4**, le potentiel

$$V = \int \frac{k' ds'}{R}$$

admettra des valeurs limites déterminées pour ses dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

toutes les fois que le point $P(x, y, z)$ se rapprochera indéfiniment d'un point déterminé de S, en restant toujours dans l'espace E_e extérieur à cette surface.

Par suite on arrive à la conclusion que, dans le cas particulier du problème de Dirichlet, celui où, le domaine considéré étant l'espace extérieur à S, la fonction harmonique cherchée se réduit sur S à une constante, cette fonction admettra, en tout point de S, non seulement la dérivée normale, mais encore des valeurs limites déterminées pour ses trois dérivées partielles du premier ordre par rapport aux coordonnées. D'ailleurs ces valeurs représenteront des fonctions continues sur S.

Nous allons maintenant étudier les questions analogues pour le cas général du problème de Dirichlet.

CHAPITRE III.

PROBLÈME DE DIRICHLET.

15. Nous considérerons le problème de Dirichlet tant pour l'espace E_i intérieur à S que pour l'espace E_e extérieur à cette surface.

Soit f la fonction donnée à laquelle doit se réduire sur S la fonction harmonique cherchée V.

En supposant que f soit continue sur S et en admettant toujours que le principe de Neumann soit applicable à la surface considérée, nous rechercherons les conditions pour qu'il existe une dérivée normale de la fonction V pour tous les points de S. Puis, nous signalerons aussi une condition assurant l'existence des valeurs limites pour les dérivées

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

le point $P(x, y, z)$ tendant vers un point quelconque de S.

Cette dernière condition se rapportera exclusivement à la fonction f, de sorte que le théorème sera applicable au cas général des surfaces que nous considérons ici.

Quant à la recherche concernant la dérivée normale seule, les dérivées par rapport aux coordonnées pouvant ne pas admettre des valeurs limites sur S, nous ne pourrons l'entreprendre que sous certaines restrictions complémentaires à l'égard de la surface, et la supposition à laquelle nous nous arrêterons consistera en ce que, pour le nombre α défini au n° **1**, on peut prendre 1.

A cette condition, on pourra construire, au voisinage de S, deux séries de surfaces fermées, dites *parallèles*, n'ayant pas de points multiples et aussi voisines de S qu'on voudra, l'une des deux séries contenant les surfaces S_i intérieures à S, l'autre celles S_e extérieures à S.

Pour s'en assurer, il n'y a qu'à se servir des inégalités du n° **1** où

l'on fera $\alpha = 1$, en les appliquant aux formules connues

$$X = x \pm \zeta \cos(n, x),$$
$$Y = y \pm \zeta \cos(n, y),$$
$$Z = z \pm \zeta \cos(n, z),$$

qui établissent une correspondance entre les points $p(x, y, z)$ de la surface S et ceux $P(X, Y, Z)$ d'une des surfaces parallèles, n étant la direction de la normale à S au point p et ζ un nombre positif fixe représentant la distance mutuelle des points p et P.

En considérant ces formules, on s'assure facilement que, si le nombre ζ vérifie les inégalités

$$\zeta < D, \qquad 2a\zeta < 1$$

(dans la supposition $aD \leqq 1$ à laquelle se réduit celle $aD^2 \leqq 1$ du n° **1**), le lieu géométrique des points P représentera une surface fermée sans points multiples qui n'aura aucun point commun avec S et admettra un plan tangent déterminé en chacun de ses points, ce plan étant parallèle au plan tangent de la surface S au point correspondant.

Cela posé, considérons la dérivée normale d'une fonction quelconque au point P de l'une des surfaces que nous venons de définir et supposons qu'on fasse tendre ζ vers zéro.

Le point P tendra vers p, et comme les normales à S et à la surface considérée aux points p et P se confondent, la dérivée dont il s'agit tendra, si elle a une limite, vers la dérivée normale de la même fonction au point p de S.

Cette remarque nous permettra, ainsi qu'on le verra tout de suite, d'employer, à une certaine condition, la formule de Green et les autres formules analogues qui résultent de la transformation d'une intégrale étendue au volume en celle de surface.

16. Supposons que, pour l'un des deux domaines E_i, E_e, on ait trouvé la fonction harmonique V se réduisant sur S à une fonction

donnée f supposée continue sur S [1], et que cette fonction harmonique admette la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ en tout point p de S.

Cherchons la condition que doit remplir pour cela la fonction f.

Pour aborder cette recherche, nous devrons faire toutefois une certaine restriction.

En supposant que la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ existe pour tous les points de S, nous admettons seulement que la différence

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P - \frac{\partial V}{\partial n},$$

le point P étant situé sur la normale n en p, tend vers zéro en même temps que la distance $Pp = \zeta$, quelle que soit la position du point p.

Mais cela ne nous suffira pas encore, et nous devrons supposer que la différence en question tende vers zéro *uniformément* pour tous les points de S.

Lorsqu'une fonction sera dans ce cas, nous dirons que sa dérivée normale est *régulière* sur S.

Tel sera, par exemple, le cas du potentiel d'une simple couche répandue sur S *à densité continue* sur cette surface, comme on s'en assure facilement par l'inspection des formules développées au Chapitre I [2].

Supposons donc que la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ soit régulière sur S.

Elle représentera alors nécessairement une fonction continue sur cette surface.

On en déduira encore une autre conclusion importante : la valeur

---

[1] En disant qu'une fonction V, définie pour l'un des deux domaines E_i, E_e, se réduit sur S à f, nous entendons par là que $V - f$ tend vers zéro, toutes les fois que le point $P(x, y, z)$ se rapproche indéfiniment vers le point p de S suivant une courbe située tout entière dans le domaine considéré.

[2] Nous y avons supposé que la densité k satisfasse à la condition (6). Mais on remarquera tout de suite que, pour ce que nous venons de dire, cette restriction n'est aucunement indispensable.

absolue de l'expression

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P,$$

pour des valeurs de ζ ne surpassant pas une certaine limite fixe (par exemple, pour $\zeta < \frac{1}{2} D$), admettra une limite supérieure indépendante de la position du point p et de ζ, et, par suite, la valeur de V au point P, ζ tendant vers zéro, tendra vers sa limite *f uniformément* pour toutes les positions du point p.

A ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction V la formule de Green dont nous nous sommes servi au n° **10**.

Pour fixer les idées, supposons qu'on considère l'espace E_i intérieur à S.

Alors, avec les notations déjà employées, nous aurons

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'} \frac{ds'}{R}, \tag{25}$$

pour tout point du domaine E_i, $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ étant la valeur de $\frac{\partial V}{\partial n}$ au point p'.

En effet, pour tout point de E_i qui ne se trouve pas sur S, on aura une formule analogue où les intégrales seront étendues à une surface S_i parallèle à S et suffisamment voisine de cette surface. Dans cette nouvelle formule, au lieu de f' et de $\frac{\partial V'}{\partial n'}$, figureront les valeurs de V et de

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n', x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n', y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n', z)$$

au point P' de S_i situé sur la normale n' à S en p', et, si l'on suppose que la surface S_i se rapproche indéfiniment de S, ces valeurs tendront vers f' et $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ uniformément pour toutes les positions du point p'. Par suite, à la limite, la formule considérée donnera celle (25).

Cela posé, considérons la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2} = W.$$

Comme le montre la formule (25), cette fonction admet la dérivée

normale intérieure $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$ en tout point p de S, et, en vertu de la première des formules (5), cette dérivée a pour expression

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\,\frac{\cos\varphi\, ds'}{r^2}.$$

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit plus haut, cette dérivée est régulière sur S.

Or, il est facile de s'assurer que la fonction W admettra aussi la dérivée normale extérieure $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ qui sera encore régulière, et que cette dérivée sera égale à $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$.

Pour le montrer, considérons la fonction figurant au second membre de la formule (25) pour les points du domaine E_e.

Ce sera une fonction harmonique dans ce domaine se réduisant sur S à

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{f'\cos\varphi'\, ds'}{r^2} - \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\,\frac{ds'}{r},$$

comme on le voit par la seconde des formules (10).

Mais, en vertu de la première de ces formules, la formule (25) donne

$$f = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'\cos\varphi'\, ds'}{r^2} + \frac{1}{2}f - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\,\frac{ds'}{r}.$$

Donc la fonction considérée se réduit sur S à zéro, et, par suite, elle est identiquement nulle dans le domaine E_e.

On a donc

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\,\frac{ds'}{R}$$

pour tous les points de l'espace E_e, et de là on voit que la dérivée $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ existe et qu'elle est régulière sur S. D'ailleurs, en vertu de la seconde des formules (5), on trouve

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\,\frac{\cos\varphi\, ds'}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial n},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i.$$

Nous avons considéré le problème pour le domaine E_i.

Si l'on voulait considérer le même problème pour le domaine E_e, on partirait de la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\Phi' ds'}{R^2},$$

qu'on établirait par la méthode indiquée pour la formule (25), et l'on parviendrait au résultat identique au précédent.

Donc, dans les deux cas, l'existence et la régularité de la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ exigent que la fonction W admette les deux dérivées normales $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$, régulières sur S, et que ces dérivées soient toujours égales.

Nous allons, à présent, établir que cette condition nécessaire est en même temps suffisante.

17. Commençons par le problème relatif au domaine E_i.

Soit

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

les deux dérivées normales étant régulières sur S.

Alors L représentera une fonction continue sur S et cette fonction vérifiera nécessairement la condition

$$\int L\, ds = 0, \tag{26}$$

comme on le voit par l'égalité

$$\int \left[\frac{\partial W}{\partial n}\cos(n, x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(n, z)\right] ds_i = 0$$

qui aura lieu pour toute surface S_i parallèle à S et suffisamment voi-

sine de cette surface (l'intégration étant étendue à tous les éléments ds_i de la surface S_i).

Cela posé, considérons l'équation

$$(27) \qquad h + \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi\, ds'}{r^2} = L,$$

h étant une fonction inconnue.

Il est facile d'en obtenir une solution sous forme d'une série.

En effet, considérons la suite indéfinie de fonctions

$$h_0, \quad h_1, \quad h_2, \quad \ldots$$

se déterminant successivement par la formule

$$h_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'_{m-1} \cos\varphi\, ds'}{r^2}$$

dans la supposition

$$h_0 = L.$$

En vertu de (26) on aura $\int h_0\, ds = 0$, et, par suite, d'après ce que nous avons vu au n° **15**, la série

$$h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots$$

sera convergente et sa convergence sera uniforme pour tous les points de S. Cette série représente donc une certaine fonction continue sur S, et l'on voit immédiatement qu'elle satisfait à l'équation (27).

Posons donc

$$h = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots,$$

et, en partant de cette valeur de h, considérons l'expression

$$U = \frac{1}{2} W - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R}.$$

On voit que c'est une fonction harmonique dans chacun des deux domaines E_i, E_e.

Or, en la considérant dans le domaine E_e, on trouve

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e = \frac{1}{2} L - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \cos\varphi\, ds'}{r^2} - \frac{1}{2} h,$$

ce qui, en vertu de (27), se réduit à zéro. D'ailleurs, on voit que cette dérivée normale est régulière sur S.

Donc, la fonction U, qui s'annule à l'infini, est identiquement nulle dans le domaine E_e. C'est ce qui résulte, en effet, de la considération de l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace extérieur à une surface S_e parallèle à S, cette surface se rapprochant indéfiniment de S.

On a donc

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R}$$

pour tous les points de l'espace E_e et, par suite,

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{h'\, ds'}{r} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'\, ds'}{r^2} - f,$$

pour tous les points de S.

Mais la fonction harmonique que représente U dans le domaine E_i se réduit sur S à

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'\, ds'}{r^2} + \frac{1}{2} f - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{r},$$

et l'égalité ci-dessus montre que cette expression se réduit à f.

Donc, la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\Phi'\, ds'}{R^2} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R}$$

définit une fonction harmonique dans le domaine E_i se réduisant sur S à f, et l'on voit que cette fonction admet une dérivée normale régulière sur S. Quant à la valeur de cette dérivée, elle est égale, en vertu de (27), à h.

18. Considérons maintenant le problème pour le domaine E_e.

En admettant, comme au numéro précédent, les égalités

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e = L,$$

dans la supposition que les deux dérivées normales soient régulières sur S, nous prendrons pour point de départ l'équation

$$(28) \qquad h - \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi\, ds'}{r^2} = -L,$$

h étant une fonction inconnue.

On voit immédiatement que cette équation admet pour solution

$$h = -h_0 - h_1 - h_2 - \ldots,$$

$h_0, h_1, h_2, \ldots$ étant les mêmes fonctions qu'au numéro précédent.

C'est une solution continue sur S, mais elle n'est pas unique.

Pour obtenir la solution continue générale, désignons par k la fonction continue définie par les équations

$$k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k' \cos\varphi\, ds'}{r^2}, \qquad \int k\, ds = 1,$$

fonction dont nous avons établi l'existence au Chapitre précédent.

Alors la solution cherchée sera donnée par la formule

$$h = Ck - h_0 - h_1 - h_2 - \ldots,$$

C étant une constante arbitraire.

Maintenant, en admettant pour h cette expression, considérons la suivante :

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R} - \frac{1}{2} W,$$

qui définit une fonction harmonique dans chacun des deux domaines E_i, E_e, fonction qui, en vertu de la continuité de h, admettra une dérivée normale régulière sur S.

En considérant cette fonction dans le domaine E_i, on trouve

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h' \cos\varphi\, ds'}{r^2} - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}L,$$

ce qui est égal à zéro en vertu de l'équation (28).

On en conclut que U conserve une valeur constante dans le domaine E_i. Cette constante dépendra de C, et si l'on désigne par A_0 sa valeur pour $C = 0$, on aura, pour son expression générale,

$$A_0 + A_1 C,$$

A_1 étant la valeur constante de

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{k'\, ds'}{R}$$

dans le domaine E_i.

Or, la constante A_1 est évidemment différente de zéro. On peut donc disposer de C de manière à avoir

$$A_0 + A_1 C = 0,$$

et si l'on s'arrête à cette hypothèse, la fonction U sera égale à zéro pour tous les points de E_i, ce qui donnera

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'\, ds'}{r^2} = \frac{1}{2}f$$

pour tous les points de S.

Mais alors la fonction harmonique que représente U dans le domaine E_e se réduira sur S à

$$\frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\varphi'\, ds'}{r^2} + \frac{1}{2}f = f.$$

Par suite, la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\, ds'}{R} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{f' \cos\Phi\, ds'}{R^2},$$

considérée dans le domaine E_e, définira une fonction harmonique se réduisant sur S à f, et cette fonction admettra une dérivée normale régulière sur S. On voit, d'ailleurs, que cette dérivée est égale à h.

19. En résumé, nous avons admis que la surface S satisfait aux conditions du n° **1** dans l'hypothèse $\alpha = 1$ et que le principe de Neumann lui est applicable, et nous sommes parvenu au résultat que voici :

Étant considéré le problème de Dirichlet pour l'un quelconque des deux domaines E_i, E_e, *pour que la fonction harmonique cherchée* V, *se réduisant sur* S *à une fonction continue* f, *admette une dérivée normale régulière sur* S, *il faut et il suffit que la fonction*

$$W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f' \cos \Phi' \, ds'}{R^2}$$

admette les deux dérivées normales $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ *qui soient également régulières sur* S, *et que l'on ait d'ailleurs*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$$

pour tous les points de S.

De cette manière, la recherche concernant la dérivée normale de la fonction V, cette dérivée étant supposée régulière sur S, se ramène à une recherche analogue pour la fonction W qui est un potentiel d'une double couche à densité $\frac{f}{2\pi}$.

Il va sans dire qu'il est impossible de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, la régularité et l'égalité des deux dérivées normales de W. Mais on peut en indiquer des conditions suffisantes, plus ou moins générales, soit en ce qui concerne la fonction f, soit relativement à la surface S, et c'est à cela que nous nous arrêterons à présent.

20. Dans une Note sur le potentiel, publiée dans les *Communica-*

tions de la Société mathématique de Kharkow (t. VI), j'ai signalé certaines conditions assurant l'existence et l'égalité des dérivées normales de W.

Entre autres, j'y ai admis l'existence de la courbure pour les sections normales de la surface S. Mais l'examen plus attentif de la chose fait voir que cette restriction est inutile, et qu'à l'égard de S il suffit d'admettre les suppositions du n° **1**, avec la restriction $\alpha = 1$, que nous avons introduite au n° **15**.

C'est ce que nous allons montrer tout de suite, en faisant la même restriction au sujet de f que dans la Note citée.

Cette restriction, étendue à tous les points de S, nous l'énoncerons de la manière suivante :

On considère un point quelconque p_0 de S et les valeurs de f en des points dont la distance au point p_0 ne surpasse pas D (n° **1**). Puis, en prenant le point p_0 pour pôle des coordonnées polaires, le rayon vecteur ρ et l'angle polaire ψ, dans le plan tangent à la surface en p_0, on regarde la valeur de f en un point p comme fonction des coordonnées ρ, ψ de la projection de p sur le plan tangent. Alors, si l'on pose

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\psi = \bar{f}$$

et que l'on désigne par f_0 la valeur de f au point p_0, on pourra assigner deux nombres positifs b et β indépendants de ρ et de la position du point p_0, et tels qu'on ait

$$|\bar{f} - f_0| < b\rho^{\beta+1}, \tag{29}$$

quelque petit que soit ρ.

Dans ces conditions, nous allons établir non seulement l'existence et l'égalité des dérivées normales de W en tout point de S, mais encore la régularité de ces dérivées sur S.

Soient P_0 un point de l'espace situé sur la normale à S en p_0 et ζ la distance $P_0 p_0$ prise positivement dans le cas où la direction $p_0 P_0$ est celle de la normale intérieure par rapport à S et négativement dans le cas contraire.

Cela posé, considérons la valeur de W au point P_0.

Pour une position donnée de p_0, ce sera une fonction de ζ, et notre problème se ramène à montrer que la dérivée $\frac{dW}{d\zeta}$ de cette fonction, ζ tendant vers zéro, tend vers une certaine limite indépendante du signe de ζ, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Soient

p un point appartenant à l'élément superficiel ds;
Φ l'angle que fait la normale en p avec la direction pP_0;
Φ_0 l'angle de la normale en p_0 avec la direction P_0p;
$\mathfrak{T}_0$ l'angle des deux normales en p et en p_0;
R_0 la distance P_0p.

On aura

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int(\cos\mathfrak{T}_0 + 3\cos\Phi_0\cos\Phi)\frac{f\,ds}{R_0^3},$$

ce que l'on peut présenter sous la forme

$$(30)\qquad \frac{dW}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int(\cos\mathfrak{T}_0 + 3\cos\Phi_0\cos\Phi)\frac{(f-f_0)\,ds}{R_0^3},$$

puisque le potentiel W, lorsqu'on y remplace f par une constante, se réduit à une constante dans chacun des deux domaines E_i, E_e [1].

Maintenant, prenons le point p_0 pour origine des coordonnées et la normale en ce point pour axe des z, et introduisons le cylindre C, considéré au n° **5**, avec les mêmes suppositions à l'égard de δ.

Soit $\Omega(\zeta, \delta)$ ce que devient le second membre de la formule (30), si l'on étend l'intégration à la portion S_1 de S, de sorte qu'on aura

$$\Omega(\zeta, 0) = \frac{dW}{d\zeta}$$

et $\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta)$ représentera le second membre de la même formule, l'intégration étant étendue à S_0.

---

[1] Ce remplacement de f par $f - f_0$, que je n'ai pas utilisé dans ma Note citée, produit toutefois de grandes simplifications. Je l'emprunte à M. Tauber. *Voir* ses Notes insérées dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* (1897, 1 Vierteljahr et 1898, 1 Vierteljahr).

Considérons l'expression de $\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta)$.

En introduisant, au lieu de x, y, les coordonnées polaires ρ, ψ, nous aurons

$$\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta}\left(1 + 3\frac{\cos\Phi_0\cos\Phi}{\cos\Theta_0}\right)\frac{(f - f_0)\rho\, d\rho}{R_0^3}.$$

Or, on a

$$\cos\Phi_0 = \frac{z - \zeta}{R_0}, \qquad R_0 = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2},$$

et, si l'on désigne par r_0, φ ce que deviennent R_0, Φ pour $\zeta = 0$, on aura

$$R_0\cos\Phi = r_0\cos\varphi + \zeta\cos\Theta_0.$$

Par suite, on trouve

$$1 + 3\frac{\cos\Phi_0\cos\Phi}{\cos\Theta_0} = \frac{\rho^2 - 2\zeta^2}{R_0^2} + \frac{z^2 + z\zeta}{R_0^2} + \frac{3(z - \zeta)r_0\cos\varphi}{R_0^2\cos\Theta_0}$$

et, en introduisant la quantité T du n° **3**, puis, en posant

$$(\rho^2 - 2\zeta^2)(T^3 - 1) + \left[z^2 + z\zeta + 3(z - \zeta)\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\Theta_0}\right]T^3 = Q,$$

on pourra présenter l'expression dont il s'agit sous la forme

$$\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta) = \int_0^{\delta}\frac{(f - f_0)(\rho^2 - 2\zeta^2)\rho\, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\delta}\frac{(f - f_0)Q\rho\, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Maintenant, remarquons que

$$\frac{r_0\cos\varphi}{\cos\Theta_0} = \rho\frac{\partial z}{\partial\rho} - z$$

et reportons-nous aux formules des n^os^ **1** et **3**.

Les inégalités (1) et (2), si l'on y fait $\alpha = 1$, donnent

$$\left|\frac{\partial z}{\partial\rho}\right| < 4a\rho, \qquad |z| < 2a\rho^2.$$

Par suite, on a

$$\left|\frac{r_0 \cos\varphi}{\cos\Phi_0}\right| < 6a\rho^2.$$

D'autre part, la formule

$$T^2 - 1 = \frac{T^2(2z\zeta - z^2)}{\rho^2 + \zeta^2},$$

si l'on suppose δ assez petit pour que, dans le champ de l'intégration, on ait $T < 2$, donne

$$|T - 1| < \frac{4}{3}\frac{2|z||\zeta| + z^2}{\rho^2 + \zeta^2} < \frac{16}{3}(a|\zeta| + a^2\rho^2).$$

De là, on voit qu'on pourra assigner deux nombres positifs fixes A et B, tels que, dans le champ d'intégration, on ait

$$|Q| < A|\zeta|(\rho^2 + \zeta^2) + B(\rho^2 + \zeta^2)^2.$$

Cela posé, désignons par η la plus grande valeur que puisse atteindre sur S_0 la fonction $|f - f_0|$ et admettons l'inégalité (29).

Alors, en remarquant que

$$|\zeta| \int_0^\delta \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} < 1,$$

nous aurons

$$|\Omega(\zeta, 0) - \Omega(\zeta, \delta)| < \frac{2b}{\beta}\delta^\beta + (A + B\delta)\eta,$$

et cette inégalité aura lieu pour toutes les valeurs de ζ, à la seule exception de $\zeta = 0$.

En même temps nous aurons évidemment

$$|\Omega(0, \varepsilon) - \Omega(0, \delta)| < \frac{b}{\beta}\delta^\beta + B\delta\eta,$$

pour tout nombre positif ε plus petit que δ; ce qui fait voir que, δ ten-

dant vers zéro, la quantité $\Omega(o, \delta)$ tend vers une certaine limite, et que, cette limite étant désignée par L_0, on a

$$|\Omega(o, \delta) - L_0| < \frac{b}{\beta}\delta^\beta + B\delta\eta.$$

Par suite, eu égard à l'identité

$$\Omega(\zeta, o) - L_0 = \Omega(\zeta, o) - \Omega(\zeta, \delta) + \Omega(o, \delta) - L_0 \\ + \Omega(\zeta, \delta) - \Omega(o, \delta).$$

nous arriverons à l'inégalité suivante

$$|\Omega(\zeta, o) - L_0| < \frac{3b}{\beta}\delta^\beta + (A + 2B\delta)\eta + |\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(o, \delta)|.$$

Or, la fonction f étant continue, la quantité η tendra, pour $\delta = o$, vers zéro. D'ailleurs, la continuité de f ne pouvant être qu'uniforme sur S, η tendra vers zéro uniformément pour toutes les positions du point p_0.

D'autre part, δ ayant une valeur fixe, différente de zéro, la quantité $|\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(o, \delta)|$ tendra, pour $\zeta = o$, vers zéro, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Par suite, on doit conclure que, ζ tendant vers zéro, la quantité

$$\Omega(\zeta, o) = \frac{dW}{d\zeta}$$

tendra vers L_0, quel que soit le signe de ζ, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Notre proposition se trouve donc démontrée, et, en se reportant au théorème du numéro précédent, on voit que, dans les conditions où nous nous sommes placé, la fonction harmonique V admettra une dérivée normale régulière sur S.

Remarque. — Des formules que nous venons de développer on tire

$$\Omega(\zeta, o) - \Omega(-\zeta, o)| < 2(A + B\delta)\eta + |\Omega(\zeta, \delta) - \Omega(-\zeta, \delta)|,$$

ce qui fait voir que, f étant une fonction continue quelconque, la

différence $\Omega(\zeta, 0) - \Omega(-\zeta, 0)$ tend, pour $\zeta = 0$, vers zéro, et cela uniformément pour tous les points de S.

Donc, *quelle que soit la fonction continue f, si l'une des deux dérivées normales $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$, $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ existe et est régulière sur* S, *l'autre le sera aussi et ces dérivées seront égales.*

Eu égard à cette proposition, on pourrait énoncer le théorème du numéro précédent plus simplement, comme il suit :

Pour que la fonction harmonique V, *se réduisant sur* S *à une fonction continue f, admette une dérivée normale régulière sur* S, *il faut et il suffit que la fonction* W *soit dans le même cas.*

21. Maintenant nous allons indiquer, pour f, une condition qui assurera l'existence non seulement des dérivées normales, mais encore des valeurs limites sur S des dérivées prises par rapport aux coordonnées, tant pour la fonction W que pour la fonction V elle-même. D'ailleurs, cette condition permettra de s'affranchir de la restriction $\alpha = 1$, et, dans ce qui suit, nous pourrons supposer que α soit un nombre positif quelconque.

Jusqu'à présent nous avons considéré la fonction f comme étant définie seulement pour les points de la surface S. Maintenant nous supposerons que f soit la valeur sur S d'une fonction donnée F définie pour tous les points de l'espace, assez voisins de S, et c'est à cette fonction F que se rapportera la condition que nous avons en vue. Voici cette condition.

A l'intérieur de toute sphère Σ d'un rayon fixe D et de centre situé sur S, la fonction F et ses dérivées par rapport à x, y, z des deux premiers ordres sont uniformes et continues.

Il est facile de montrer que cette condition assure l'existence des valeurs limites sur S des dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$, dans chacun des deux domaines E_i, E_e.

Pour le montrer, considérons l'une quelconque des sphères Σ, en supposant le rayon D assez petit pour qu'il satisfasse aux conditions du n° **1**, et pour que les dérivées des deux premiers ordres de la fonction F aient des valeurs déterminées sur la surface Σ elle-même.

La surface S partagera l'espace intérieur à Σ en deux portions : l'espace E_{i0} intérieur à S et l'espace E_{e0} extérieur à S.

Considérons l'un quelconque de ces deux espaces, par exemple, celui E_{i0} qui est limité par la portion Σ_i de Σ intérieure à S et par la portion S_0 de S intérieure à Σ.

Soient :

ds' un élément superficiel de S_0 ;
$d\sigma'$ un élément superficiel de Σ_i ;
$d\tau'$ un élément de volume pour l'espace E_{i0} ;
p' un point appartenant soit à l'élément ds', soit à celui $d\sigma'$;
$P'(x', y', z')$ un point appartenant à l'élément $d\tau'$;
$P(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace ne se trouvant pas sur la surface qui limite E_{i0} ;
R la distance du point P soit au point p', soit au point P' ;
n' la direction de la normale à S ou à Σ en p' dirigée à l'intérieur de E_{i0} ;
Φ' l'angle que fait n' avec la direction $p'P$;
F' la valeur de F en p' ou en P' ;
$\frac{\partial F'}{\partial n'}$ la valeur de l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n', x) + \frac{\partial F}{\partial y}\cos(n', y) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(n', z)$$

au pied p' de la normale n'.

Cela posé, nous nous servirons des théorèmes connus permettant d'exprimer l'intégrale

$$\int \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial z'^2} \right) \frac{d\tau'}{R}$$

étendue à l'espace E_{i0} au moyen des intégrales étendues à la surface qui sert de frontière à E_{i0}.

Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 F'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial z'^2} = \Delta F'.$$

Alors nous aurons :

Si le point P est intérieur à E_{i0},

$$\int \frac{\Delta F' \, d\tau'}{R} = \int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + \int \frac{F' \cos\Phi' \, d\tau'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{d\tau'}{R} - 4\pi F,$$

et, si ce point est extérieur à E_{i0},

$$\int \frac{\Delta F' \, d\tau'}{R} = \int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + \int \frac{F' \cos\Phi' \, d\tau'}{R^2} - \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{d\tau'}{R},$$

les intégrales relatives à ds' et à $d\tau'$ étant respectivement étendues à S_0 et à Σ_i.

Or, avec les notations actuelles, on a

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2} + W_1,$$

W_1 étant le potentiel dû à la portion de S extérieure à la sphère Σ.

Par suite, si l'on pose

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta F' \, d\tau'}{R} + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{d\tau'}{R} - \frac{1}{2\pi} \int \frac{F' \cos\Phi' \, d\tau'}{R^2} + W_1 = U,$$

il viendra : si le point P est intérieur à E_{i0},

$$W = 2F + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + U,$$

et, si ce point est extérieur à E_{i0},

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial F'}{\partial n'} \frac{ds'}{R} + U.$$

Nous remarquons maintenant que, les dérivées du second ordre de la fonction F étant continues et, par suite, limitées à l'intérieur de la

sphère Σ, quelle que soit la position de son centre sur S, on peut assigner une limite supérieure fixe aux valeurs absolues des quantités

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F'}{\partial x'}\right),\qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F'}{\partial y'}\right),\qquad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial F'}{\partial z'}\right),$$

où r désigne la distance mutuelle des points $p(x, y, z)$ et $p'(x', y', z')$ auxquels se rapportent les valeurs des dérivées, ces points étant pris arbitrairement sur S.

Par suite, on pourra trouver un nombre fixe A, tel qu'on ait

$$\left|\frac{\partial F}{\partial n}-\frac{\partial F'}{\partial n'}\right|<A\,r^{\alpha},$$

quelles que soient les positions des points p et p' sur S, α étant le nombre défini au n° **1**.

De là, en vertu de ce que nous avons montré au n° **4**, il suit que les dérivées premières du potentiel

$$\int\frac{\partial F'}{\partial n'}\,\frac{ds'}{R}$$

tendront vers des limites déterminées, toutes les fois que le point P, en restant toujours dans l'un quelconque des deux domaines E_{i0}, E_{e0}, se rapprochera indéfiniment vers un point p de S ne se trouvant pas sur le contour de S_0.

D'autre part, on voit que la fonction U, ainsi que ses dérivées du premier ordre, sont continues à l'intérieur de toute sphère Σ' concentrique et intérieure à Σ.

Donc, les formules obtenues montrent que les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ admettront des valeurs limites déterminées en tout point p de S intérieur à Σ', et cela pour chacun des domaines E_{i0}, E_{e0}.

Ces valeurs limites, pour les deux domaines, seront, en général, différentes. Mais, en ce qui concerne les dérivées normales, les formules (5) montrent bien qu'on aura

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i=\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e=L,$$

où l'on a posé

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}\frac{\partial F'}{\partial n'}\frac{\cos\gamma\, ds'}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Nous n'avons considéré que les points intérieurs à Σ'. Mais le centre commun des sphères Σ et Σ' peut être placé où l'on voudra sur S.

Par suite, les dérivées $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ auront des valeurs limites en tout point de S, et les dérivées $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i$ et $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ seront toujours égales. D'ailleurs, comme on le voit aisément, ces dérivées normales seront régulières sur S.

Quant à la valeur commune L des dérivées normales, nous remarquerons qu'elle satisfera à une condition de la forme

$$(31) \qquad |L - L'| < br^{\beta},$$

b et β étant des nombres positifs indépendants de la position des points p, p' auxquels se rapportent les valeurs L, L'.

En effet, eu égard à ce qui a été montré au n° 5, l'expression ci-dessus de L fait voir que la condition dont il s'agit sera remplie, si l'on a

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U'}{\partial n'}\right| < cr^{\gamma}$$

pour toutes les positions des points p, p' sur S à l'intérieur de Σ, c et γ étant des nombres positifs indépendants de la position de ces points, et cette dernière inégalité résulte immédiatement des propriétés connues des potentiels de volume.

22. Appliquons les résultats précédents au problème de Dirichlet.

Considérons, par exemple, le problème qui se rapporte au domaine E_i.

Le principe de Neumann étant supposé applicable à la surface S, l'équation (27) définira une fonction continue h, et cette fonction, en

vertu de (31), vérifiera une condition de la forme

$$|h - h'| < cr^{\gamma},$$

c, γ étant des nombres positifs indépendants des positions des points p, p'.

Par suite, le potentiel

$$\int \frac{h'\,ds'}{R}$$

admettra sur S des valeurs limites déterminées pour ses dérivées de premier ordre dans chacun des deux domaines E_i, E_e, et la fonction

$$U = \frac{1}{2}W - \frac{1}{4\pi}\int \frac{h'\,ds'}{R},$$

que nous avons considérée au n° **17** sera dans le même cas.

Donc, on pourra considérer l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

étendue à l'espace E_e, et la valeur de cette intégrale sera égale à celle-ci

$$\int U \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e ds,$$

étendue à la surface S.

Par suite, l'égalité

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e = 0,$$

qui a lieu pour tous les points de S, conduira à la conclusion que $U = 0$ pour tous les points de E_e.

Or, cela étant établi, on arrive à la formule, obtenue à la fin du n° **17**, qui donne la solution du problème.

D'une manière tout à fait analogue, on démontrera aussi la formule du n° **18** qui donne la solution du problème pour le domaine E_e, et

ces formules montrent bien que les valeurs limites des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ existent en tout point p de S.

D'ailleurs, on voit que la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ est régulière sur S.

On arrive donc à la proposition suivante :

$F(x, y, z)$ étant une fonction uniforme et continue, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, au voisinage de tout point de S et f représentant la valeur de F sur S, la fonction V harmonique dans l'un quelconque des deux domaines E_i, E_e et se réduisant à f sur S admettra, pour ses dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, des valeurs limites déterminées sur S, et sa dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ sera régulière sur S.

Cette proposition est exacte pour toute surface S satisfaisant aux conditions du n° **1**, pourvu que le principe de Neumann lui soit applicable.

23. Le théorème précédent permet d'établir la possibilité du problème électrostatique dans des conditions assez générales.

Considérons un conducteur limité par une surface S satisfaisant aux conditions ci-dessus, et supposons que ce conducteur, chargé d'une quantité donnée g d'électricité, se trouve en présence de corps mauvais conducteurs situés tous à l'extérieur de S et portant des distributions électriques données.

On demande la distribution électrostatique à la surface S.

Ce problème dépend, comme on sait, de la recherche d'une fonction V, harmonique dans le domaine E_e extérieur à S et se réduisant sur S à

$$C - U,$$

U étant une fonction connue représentant le potentiel de l'électricité que portent les mauvais conducteurs et C une constante qu'on devra déterminer par la condition que la charge du conducteur soit égale à g.

La fonction V une fois trouvée, la possibilité du problème dépendra de l'existence de la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ sur S. Or, la fonction C — U jouissant de toutes les propriétés de la fonction F, cette existence est hors de doute, et la densité q de la couche électrique en équilibre sur S sera donnée par la formule

$$q = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}\right),$$

où le second membre sera linéaire par rapport à C qu'on déterminera par l'équation $\int q\, ds = g$.

D'ailleurs, en se reportant à ce qui a été montré au n° **18**, on pourra déterminer q directement comme il suit :

En entendant par u' la valeur de la fonction U au point p' de l'élément ds', désignons par L la valeur de la dérivée normale de la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{u' \cos\Phi'\, ds'}{R^2}$$

en un point quelconque p de S. Puis, désignons par $h_0, h_1, h_2, \ldots$ les fonctions se déterminant successivement par la formule

$$h_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'_{m-1} \cos\varphi\, ds'}{r^2},$$

dans la supposition $h_0 = L$, et introduisons la fonction k définie au n° **18**.

Alors nous aurons

$$q = gk + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n} + L + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\right).$$

24. Une autre application, non moins importante, est relative à la fonction de Green.

Soient E l'un des deux domaines E_i, E_e; $P(x, y, z)$ et $P'(x', y', z')$ des points de ce domaine et R la distance PP'.

En plaçant le point P dans une position fixe ne se trouvant pas sur S, désignons par H la fonction de x', y', z', harmonique dans le do-

maine E, et se réduisant sur S à $\frac{1}{R}$. Alors la fonction

$$G = \frac{1}{R} - H$$

représentera ce qu'on appelle la *fonction de Green*, correspondant au pôle P.

Cette fonction (ainsi que R et H) dépendra non seulement de x', y', z', mais encore de x, y, z, et si l'on veut appeler l'attention sur ce point, on pourra la désigner par

$$G(x', y', z'; x, y, z).$$

On sait que la plupart des applications où se présente la fonction G exigent la considération des valeurs limites des dérivées $\frac{\partial G}{\partial x'}$, $\frac{\partial G}{\partial y'}$, $\frac{\partial G}{\partial z'}$ sur S, et que, dans bien des cas, cette fonction ne peut être utile que si ces valeurs existent.

Or, dans les suppositions que nous avons faites à l'égard de S, leur existence est hors de doute, puisque, le pôle P ne se trouvant pas sur S, la fonction $\frac{1}{R}$ jouira de toutes les propriétés de la fonction $F(x', y', z')$, et le théorème du n° **22** sera applicable.

L'existence de ces valeurs limites étant prouvée, on pourra se servir des méthodes connues pour étudier les propriétés de la fonction G, et les propositions connues qui s'y rattachent pourront être établies rigoureusement.

Par exemple, on pourra démontrer l'égalité fondamentale due à Riemann,

$$G(x, y, z; x', y', z') = G(x', y', z'; x, y, z).$$

23. En terminant, arrêtons-nous sur la formule connue qui donne la solution du problème de Dirichlet au moyen de la fonction de Green.

Pour avoir, dans les cas des deux domaines E_i, E_e, les mêmes formules, nous conviendrons ici d'attribuer à la normale la direction

intérieure, non pas par rapport à E_i (comme nous l'avons fait jusqu'à présent), mais par rapport au domaine E que nous considérerons.

Alors, quel que soit le domaine considéré, la formule de Green donnera

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) ds' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R},$$

en supposant, bien entendu, que la fonction f satisfait à la condition du n° **21**.

Dans cette formule, n' désigne la direction de la normale au point p' appartenant à l'élément ds' et $\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)$ est la valeur que prend l'expression

$$\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x'}\cos(n', x) + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y'}\cos(n', y) + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z'}\cos(n', z),$$

lorsque le point $P'(x', y', z')$ vient en p'. Dans le même sens seront employées aussi les notations $\frac{\partial H}{\partial n'}$, $\frac{\partial G}{\partial n'}$.

Cela posé, et en remarquant que, par la nature de la fonction H, on a

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{ds'}{R} = \int f' \frac{\partial H}{\partial n'} ds',$$

on trouve

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f' \frac{\partial G}{\partial n'} ds'$$

et c'est la formule dont il s'agit.

Cette formule n'est démontrée que dans le cas où la fonction f satisfait à la condition du n° **21**. Mais elle peut être étendue à tous les cas où f est une fonction continue.

En effet, quelle que soit f, la formule en question définit une fonction harmonique dans le domaine E. Il ne reste donc qu'à montrer que cette fonction se réduit sur S à f, et c'est ce qu'on pourra faire par une méthode analogue à celle employée par M. Schwarz dans le cas de l'intégrale de Poisson.

L'application directe de cette méthode exigerait la discussion de la fonction $\frac{\partial G}{\partial n'}$ dans la supposition que le point P soit infiniment voisin

du point p' [1]. Mais nous pouvons éviter cette discussion, en nous servant du théorème du n° **22**.

A cet effet, considérons d'abord le cas particulier où l'on a

$$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées d'un point quelconque fixe de S que nous désignerons par p_0.

Dans ce cas, le théorème, que nous venons de mentionner, étant applicable, la formule ci-dessus donnera la solution du problème de Dirichlet, et, par suite, la fonction V définie par cette formule tendra vers f toutes les fois que le point P tendra vers un point $p(x, y, z)$ de S.

D'ailleurs, si l'on suppose que le point P se trouve sur la normale du point p et que l'on désigne par ζ la distance Pp, on pourra trouver un nombre positif A indépendant de la position du point p et tel qu'on ait

$$|V - f| < A\zeta.$$

C'est ce qui résulte, en effet, de ce que la dérivée normale de la fonction V considérée est régulière sur S.

Nous supposerons que le nombre A ait été choisi indépendamment de la position du point p_0, ce qui est, évidemment, permis, f étant une fonction entière de x_0, y_0, z_0.

Cela posé, appliquons notre inégalité au point p_0. La fonction f se réduisant, en ce point, à zéro, nous aurons

$$V_0 < A\zeta,$$

V_0 étant la valeur de V au point P_0 situé sur la normale à la distance ζ du point p_0 (valeur qui est, évidemment, positive).

---

(1) Cette méthode a été employée récemment par M. Zaremba. *Voir* les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (3e série, t. XIV, p. 251; 1897). On remarquera que M. Zaremba considère la fonction u qui n'est autre chose que $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial n'}$, sans démontrer son existence.

Nous remarquons maintenant que pour tous les points de S on a

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \geqq 0,$$

puisque la fonction G s'annule sur la surface S et reste positive pour tous les autres points du domaine E.

Par suite, on aura

$$V_0 > \frac{1}{4\pi} \int_{(1)} f' \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds',$$

l'intégrale étant étendue à une portion quelconque S_1 de S et G_0 désignant la fonction de Green correspondant au pôle P_0.

Nous prendrons pour S_1 la portion de S extérieure à une sphère Σ de rayon δ ayant pour centre le point p_0. Alors l'inégalité ci-dessus donnera

$$V_0 > \frac{\delta^2}{4\pi} \int_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds',$$

et nous aurons

$$\frac{1}{4\pi} \int_{(1)} \frac{\partial G_0}{\partial n} ds' < A \frac{\zeta}{\delta^2}.$$

Maintenant supposons que f soit une fonction continue quelconque et considérons la fonction V définie par la formule qui nous occupe.

En posant

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial G}{\partial n'} ds' = \Omega$$

et désignant par Ω_0, V_0 les valeurs de Ω, V au point P_0 et par f_0 celle de f en p_0, nous aurons

$$V_0 - f_0 = (\Omega_0 - 1) f_0 + \frac{1}{4\pi} \int (f' - f_0) \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

Or, dans le domaine E_i on a $\Omega = 1$, et dans le domaine E_e, sauf les points de S, $\Omega < 1$. Par suite, en entendant par η la plus grande valeur de la fonction $|f' - f_0|$ à l'intérieur de la sphère Σ et par M la limite supérieure de la fonction $|f|$ sur S, on trouve

$$|V_0 - f_0| < M(1 - \Omega_0) + \eta + \frac{M}{2\pi} \int_1 \frac{\partial G_0}{\partial n'} ds'.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$1 - \Omega_0 < B\zeta,$$

B étant un certain nombre positif qu'on peut prendre indépendamment de la position du point p_0.

Donc il vient

$$|V_0 - f_0| < \eta + 2AM\frac{\zeta}{\delta^2} + BM\zeta.$$

Or, la fonction f étant continue sur S, la quantité η tendra, pour $\delta = 0$, vers zéro, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Par suite, l'inégalité obtenue, où l'on pourra, par exemple, poser $\zeta = c\delta^3$, fait voir que, ζ tendant vers zéro, V_0 tendra vers f_0, et cela uniformément pour toutes les positions du point p_0.

Ce résultat étant établi, la continuité même de la fonction f assure que, toutes les fois que le point P tendra vers p_0 suivant une courbe quelconque, la fonction V tendra vers f_0.

Donc, dans le cas des surfaces que nous avons considérées, la formule

$$V = \frac{1}{4\pi}\int f'\frac{\partial G}{\partial n'}\,ds'$$

donne bien la solution du problème de Dirichlet, quelle que soit la fonction continue f à laquelle doit se réduire sur la surface la fonction harmonique cherchée.

Sur l'équation $\Delta u = e^u$;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait l'importance de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$$

dans la théorie des fonctions fuchsiennes. J'ai fait autrefois une étude complète de cette équation, et j'ai montré comment on pouvait l'intégrer avec certaines conditions aux limites, tant sur une portion ouverte de surface de Riemann que sur une surface fermée. M. Poincaré vient de reprendre les mêmes questions en se plaçant à un tout autre point de vue. Comme l'exposition complète de ma méthode se trouve disséminée dans différents Mémoires ou Notes, je demande la permission de les rappeler en insistant sur un lemme qui peut être utile dans bien d'autres cas.

1. J'ai d'abord examiné le cas d'une surface ouverte, c'est-à-dire ayant un bord. On le trouve traité dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1890). La question de l'intégration de cette équation, en supposant données sur un contour les valeurs de cette intégrale, est d'abord traitée en supposant que le contour enveloppe une aire suffisamment petite, puis on passe de ce cas à celui d'un contour quelconque. Cette extension était faite en étendant le procédé alterné

de M. Schwarz et en considérant deux aires, ayant une partie commune, dont les bords se rencontrent. Outre que cette méthode d'extension ne s'étend pas à un nombre quelconque de variables, quelques difficultés de détail pouvaient subsister qu'il est préférable de ne pas avoir à discuter. Aussi dans les problèmes de cette nature, j'ai employé plus tard une autre méthode d'extension dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques;* 1896, et aussi dans une Note des *Comptes rendus* (juin, 1897). C'était d'ailleurs celle dont j'avais déjà fait usage pour le cas spécial de l'équation

$$\Delta u = k e^u \qquad (k > 0)$$

dans le Travail consacré spécialement aux surfaces de Riemann fermées (*Journal de Mathématiques;* 1893).

Je veux seulement revenir sur une remarque très générale qui peut être utile dans d'autres circonstances. Nous partons de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y) \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

La fonction $F(u, x, y)$ est une fonction continue de u, x et y, pour toute valeur réelle de u, quand le point (x, y) est dans une certaine région R du plan et, de plus, cette fonction croît toujours avec u. Le procédé alterné, tel que nous l'appliquons, consiste à passer d'un premier contour à un second contour enveloppant une aire plus grande, les deux contours n'ayant pas de points communs sur leurs frontières. Voici le lemme sur lequel repose cette analyse.

Prenons d'abord une équation de la forme

$$(1) \qquad \Delta u = p(x, y) u \qquad [p(x, y) > 0];$$

on considère une aire limitée par deux courbes C *et* C′, *et soit une intégrale continue* u *s'annulant en tous les points de* C *et prenant sur* C′ *des valeurs comprises entre* $-M$ *et* $+M$. *On peut, étant donné un point* A *à l'intérieur de l'aire, trouver un nombre* q *infé-*

rieur à l'unité, tel que l'on ait

$$(2) \qquad |u_A| < Mq,$$

en désignant par u_A la valeur de u au point A.

Pour le démontrer, soit v l'intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta v = 0,$$

prenant sur C la valeur *zéro*, et sur C′ la valeur *un*; v prendra en A une valeur q inférieure à l'unité. Soit, d'autre part, U l'intégrale de l'équation

$$\Delta U = p(x, y) U,$$

prenant sur C la valeur zéro, et sur C′ la valeur *un*. L'équation

$$\Delta(U - v) = p(x, y) U$$

montre que l'on a

$$U < v$$

et, par suite,

$$U_A < q.$$

Enfin, de l'équation

$$\Delta(u - MU) = p(x, y)(u - MU),$$

on conclut

$$u < MU,$$

et, par suite,

$$u_A < Mq;$$

on démontrerait de la même manière que

$$u_A > -Mq.$$

L'inégalité (2) est donc établie. On remarquera que q ne dépend nullement de la fonction positive $p(x, y)$, ce qui est essentiel pour la suite.

Ce lemme s'étend immédiatement à l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

et peut s'énoncer, dans toute sa généralité, sous la forme suivante :

Soient u_1 et u_2 deux intégrales de cette équation prenant les mêmes valeurs sur C, *et telles que* $|u_1 - u_2|$ *soit compris le long de* C′ *entre* $-$ M *et* $+$ M ; *on aura au point* A

$$|u_1 - u_2|_A < Mq \qquad (q < 1).$$

La démonstration est immédiate, car on a

$$\Delta(u_1 - u_2) = F'_u(U, x, y)(u_1 - u_2),$$

U étant compris entre u_1 et u_2; c'est une équation de la forme (1), puisque F est une fonction croissante, et l'on peut par suite se servir du résultat précédent, ce qui achève la démonstration. L'application du procédé alterné, dans les conditions indiquées, ne présente plus alors aucune difficulté.

2. Pour ce qui concerne la surface de Riemann fermée, avec des conditions limites données par des logarithmes, je n'ai qu'à indiquer mon Travail de 1893 (*Journal de Mathématiques*), où la question est traitée, je crois, d'une manière complètement rigoureuse et très rapide. Dans l'énoncé des conditions déterminant l'intégrale figurent certaines inégalités, le cas de l'égalité se trouvant exclu. La méthode de M. Poincaré, plus longue, ce me semble, que la mienne, lui permet par contre de traiter les cas limites où certaines inégalités deviendraient des égalités, ce qui correspond à certaines particularités pour les fonctions fuchsiennes. J'espère pouvoir montrer un jour que ces cas peuvent aussi être traités par les méthodes d'approximations successives qui m'ont été si utiles dans toutes les questions de ce genre.

Sur les points singuliers d'une série de Taylor;

PAR M. EUGÈNE FABRY.

1. Une série, ordonnée suivant les puissances entières de la variable, définit une fonction analytique pour les points intérieurs à la circonférence de convergence. La définition s'étend aux points extérieurs au moyen de nouvelles séries déduites de la première, pourvu que la circonférence de convergence renferme des points non singuliers. M. Hadamard a donné (*Journal de Liouville*, 4e série, t. VIII) une méthode pour la recherche des points singuliers situés sur la circonférence de convergence. J'ai publié deux Mémoires (*Annales de l'École normale*, 3e série, t. XIII; *Acta mathematica*, t. XXII) où, par une généralisation de cette méthode, j'ai obtenu de nouveaux résultats, particulièrement sur les séries dont le prolongement analytique est impossible. Je me propose ici d'étudier les points singuliers par une nouvelle méthode, qui repose sur le calcul des différences des coefficients et dont j'ai indiqué le principe (*Comptes rendus*, 20 décembre 1897). Quand on connaît l'ordre de grandeur des différences d'ordre infini, on pourra déterminer des régions ne contenant aucun point singulier, et l'on connaîtra les points singuliers situés sur la limite de ces régions, qui peuvent s'étendre au delà du cercle de convergence et dans bien des cas jusqu'à l'infini. On peut en déduire des cas assez généraux où les coefficients étant des fonctions continues, qui remplissent certaines conditions de grandeur, la circonférence de

convergence ne contient qu'un seul point singulier. Cela peut expliquer pourquoi, comme l'a fait remarquer M. Picard dans la *Revue générale des Sciences*, l'on a eu autrefois tant de peine à former des séries ne pouvant pas se prolonger analytiquement, alors que ce fait se présente dans les cas les plus généraux, ainsi que l'a montré M. Borel (*Comptes rendus*, 14 décembre 1896).

2. Soit une série $f(z) = \Sigma a_n z^n$, dont le rayon de convergence est R. ε étant fixe, mais aussi petit que l'on voudra, pourvu que n soit assez grand, on a

$$|a_n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n.$$

Soit λ une quantité imaginaire et l son module. Posons

$$\Delta_\nu^n = \lambda^n a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda^{\nu-2} a_{n+\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

on en déduit

$$\Delta_0^n + \frac{\nu}{1}\Delta_1^n + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta_2^n + \ldots + \Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu}$$

et

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} z^\nu \frac{(n+\nu)!}{\nu!} = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{-n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{\nu!}\left(\frac{z}{\lambda - z}\right)^\nu.$$

Pourvu que n soit assez grand, on a

$$|\Delta_\nu^n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n \left(1 + \frac{l}{R} + l\varepsilon\right)^\nu.$$

Il en résulte que la série précédente est convergente toutes les fois que $\left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \frac{R}{l + R}$. Mais il suffit qu'elle soit convergente pour qu'elle représente $f^n(z)$.

Soit θ une quantité positive. Représentons par $\frac{1}{A}$ la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, où ν peut prendre toutes

les valeurs, de o à ∞, pour chaque valeur de n. Cette limite supérieure étant supposée finie, si n est assez grand, on aura quel que soit ν

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n.$$

Si $\theta < \frac{R}{l+R}$, en choisissant $\varepsilon < \frac{1}{l}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{l+R}{R}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu &< \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)^\nu \theta^\nu \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \\
&< \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)^\nu \theta^\nu \\
&= \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \left[1-\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)\right]^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{1}{A} \leq \frac{1}{R-\theta(R+l)},$$

et, quel que soit θ, on aura

$$A + \theta(R+l) - R \geq 0;$$

d'autre part, en supposant $\nu = 0$, on voit que $A \leq R$.

Si z a une valeur telle que $\left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \theta$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^n(z)}{n!}\right| &< \left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|^{n+1} \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n \sum_{\nu=}^{\infty} \left|\frac{z}{(\lambda - z)\theta}\right|^\nu \\
&= \left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|^n \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n \frac{|\lambda|}{|\lambda - z| - \left|\frac{z}{\theta}\right|};
\end{aligned}$$

la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{\left|\frac{f^n(z)}{n!}\right|}$ est alors au plus égale à $\frac{1}{A}\left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|$. Il n'y a donc aucun point singulier à l'intérieur du cercle de centre z et de rayon $A\left|1 - \frac{z}{\lambda}\right|$.

Posons $\frac{z}{\lambda - z} = te^{\alpha i}$, $t < 0$. Il n'y a aucun point singulier intérieur au cercle de centre $z = \frac{\lambda t}{t + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A}{|t + e^{-\alpha i}|}$. Un point $z = \rho e^{\omega i}$, où $\rho \geqq R$, sera intérieur à l'un de ces cercles, si l'on peut trouver deux arcs α et β tels que

$$\rho e^{\omega i} = \frac{\lambda t + A' e^{\beta i}}{t + e^{-\alpha i}}, \qquad \text{où} \qquad A' < A, \qquad t < 0,$$

car ce point est sur la circonférence de centre $\frac{\lambda t}{t + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A'}{|t + e^{-\alpha i}|}$. Il faut donc que

$$t\rho e^{\omega i} + \rho e^{(\omega - \alpha)i} = \lambda t + A' e^{\beta i};$$

on pourra déterminer α et β si la circonférence de centre $t\rho e^{\omega i}$ et de rayon ρ coupe, ou touche, celle de centre λt et de rayon A', c'est-à-dire si

$$\rho - A' \leqq t|\lambda - \rho e^{\omega i}| \leqq \rho + A'.$$

Pourvu que $\rho - A < \theta|\lambda - \rho e^{\omega i}|$, on peut choisir t et A' de façon à vérifier ces inégalités. Il suffit de choisir A' tel que

$$A > A' > \rho - \theta|\lambda - \rho e^{\omega i}|,$$

puis t de façon que

$$t < 0 \qquad \text{et} \qquad \rho - A' < t|\lambda - \rho e^{\omega i}| < \rho + A';$$

on est ainsi conduit au théorème suivant :

Soient

$$\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda^{\nu-2} a_{n+\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

où λ est une quantité donnée, réelle ou imaginaire, et θ une quantité positive. Si $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}\, a$, pour $n = \infty$, quel que soit ν, une limite supérieure finie $\frac{1}{A}$, il n'y a aucun point singulier z vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A.$$

5. Supposons $|z| = R$. Si $R - \theta|\lambda - Re^{\omega i}| < A$, le point de la circonférence de convergence, $Re^{\omega i}$, n'est pas singulier.

Soit $\lambda = le^{\gamma i}$, cela a lieu si

$$4lR\sin^2\frac{\omega-\gamma}{2} > \left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2.$$

On a vu que l'on a toujours $R - A \leqq \theta(R + l)$, par suite

$$\left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2 \leqq 4lR;$$

d'autre part, $\left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2$ ne peut pas être négatif, car autrement on aurait, quel que soit ω,

$$R - A < \theta|l - R| \leqq \theta|\lambda - Re^{\omega i}|;$$

aucun des points $Re^{\omega i}$ ne serait singulier, et le rayon de convergence serait supérieur à R. On a donc, dans tous les cas,

$$\theta(R + l) \geqq R - A \geqq \theta|l - R|.$$

Posons

$$4lR\sin^2\frac{\Omega}{2} = \left(\frac{R-A}{\theta}\right)^2 - (l-R)^2, \qquad 0 \leqq \Omega \leqq \pi,$$

cet arc Ω est toujours réel, et il n'y a aucun point singulier, sur la circonférence de convergence, entre les points d'argument $\gamma + \Omega$ et $2\pi + \gamma - \Omega$.

En particulier, si $R - A = \theta|l - R|$, on a

$$\Omega = 0;$$

le point $z = Re^{\gamma i}$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence.

Si $l = R$, ces expressions se simplifient; on a

$$2R\theta \geqq R - A \geqq 0, \qquad \sin\frac{\Omega}{2} = \frac{R-A}{2R\theta}.$$

4. Supposons λ réel et positif, c'est-à-dire $\gamma = 0$, ce qui est toujours possible par un changement de variable. Considérons la courbe limite définie par l'équation

$$\rho - A = \theta |\lambda - \rho e^{\omega i}|,$$

ce qui suppose $\rho \geqq A$. Cette courbe divise le plan en deux régions. Pour $z = +R$, on a

$$R - A \leqq \theta |\lambda - R|;$$

pour $z = -R$, on a

$$R - A \leqq \theta(\lambda + R).$$

Il n'y a donc aucun point singulier dans celle de ces deux régions qui comprend le point $-R$ et ne comprend pas $+R$. Cela suffit pour la définir, car cette courbe limite ne passe jamais par ces deux points.

L'équation de la courbe, en coordonnées polaires, sera

$$\rho^2(1 - \theta^2) - 2\rho(A - \lambda\theta^2\cos\omega) + A^2 - \lambda^2\theta^2 = 0, \qquad \text{où} \qquad \rho \geqq A.$$

Si $\theta < 1$, ρ a une racine plus petite que A, et l'on a la branche

$$\rho = \frac{A - \lambda\theta^2\cos\omega + \sqrt{(A - \lambda\theta^2\cos\omega)^2 - (1 - \theta^2)(A^2 - \lambda^2\theta^2)}}{1 - \theta^2}$$

$$= \frac{\lambda^2\theta^2 - A^2}{\lambda\theta^2\cos\omega - A + \sqrt{(A - \lambda\theta^2\cos\omega)^2 - (1 - \theta^2)(A^2 - \lambda^2\theta^2)}};$$

la quantité sous le radical est égale à

$$\theta^2[(A - \lambda\cos\omega)^2 + \lambda^2(1 - \theta^2)\sin^2\omega] \geqq 0;$$

ces deux formes de ρ montrent que, si ω croît de 0 à π, ρ croît constamment. On a une courbe fermée, à l'intérieur de laquelle ne peut se trouver aucun point singulier.

Si $A = R - \theta(\lambda + R)$, ce qui suppose $\theta < \frac{R}{\lambda + R}$, la courbe passe par le point $z = -R$ et est tout entière intérieure à la circonférence de convergence.

Si $\theta = 1$, on a la courbe limite

$$2\rho(\lambda\cos\omega - A) = \lambda^2 - A^2, \qquad \text{où} \qquad \rho \geqq A,$$

on a

$$A \leqq R - |\lambda - R| \leqq \lambda.$$

Pour que ρ soit positif, il faut que $\lambda\cos\omega - A > 0$, ce qui donne la branche d'hyperbole

$$\rho = \frac{\lambda^2 - A^2}{2(\lambda\cos\omega - A)}, \qquad \cos\omega \geqq \frac{A}{\lambda}.$$

Si $\theta > 1$, on a

$$A \leqq R - \theta|\lambda - R| \leqq \lambda.$$

Pour que ρ soit réel, il faut

$$|\theta^2\lambda\cos\omega - A| > \sqrt{(\theta^2 - 1)(\lambda^2\theta^2 - A^2)}.$$

Mais, si $\theta^2\lambda\cos\omega - A < 0$, les deux valeurs de ρ sont négatives. On a donc la branche de courbe :

$$\rho = \frac{\theta^2\lambda\cos\omega - A \pm \sqrt{(\lambda\theta^2\cos\omega - A)^2 - (\theta^2 - 1)(\lambda^2\theta^2 - A^2)}}{\theta^2 - 1}$$

$$\theta^2\lambda\cos\omega > A + \sqrt{(\theta^2 - 1)(\lambda^2\theta^2 - A^2)};$$

lorsque ω croît depuis zéro, la plus petite valeur de ρ croît, l'autre diminue, et l'on a une courbe fermée, à l'extérieur de laquelle il n'y a aucun point singulier à distance finie.

Dans ce cas, $z = \infty$ est un pôle ou un point ordinaire. En effet, si n est assez grand, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{\nu!}\left(\frac{z}{\lambda - z}\right)^n = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{n+1} f^n(z)$$

est convergente tant que $\left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \theta$; le point $z = \infty$, $\frac{z}{\lambda - z} = -1$, n'est pas singulier pour $z^{n+1} f^n(z)$ et ne peut être, pour $f(z)$, qu'un point ordinaire ou un pôle d'ordre n au plus.

Quel que soit θ, si $A = R - \theta|\lambda - R|$, $z = +R$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence.

Si $\theta < 1$, la courbe passe alors par le point $z = +R$.

Si $\theta \geqq 1$ et $\lambda > R$, on a $A = R - \theta(\lambda - R)$ et la courbe limite passe encore par $z = +R$.

Si $\theta > 1$, $\lambda \leqq R$, on a

$$A = R - \theta(R - \lambda) \leqq \lambda.$$

Alors, pourvu que $\rho > R$, on a

$$\rho - A < \theta(\rho - \lambda) \leqq \theta|\lambda - \rho e^{\omega i}|,$$

et lorsque $\rho = R$, si $\omega \gtrless 0$,

$$R - A = \theta(R - \lambda) < \theta|\lambda - Re^{\omega i}|.$$

Le point $z = +R$ est alors le seul point singulier à distance finie, $z = \infty$ pouvant être un pôle ou un point ordinaire.

Enfin, si $\theta = 1$, $\lambda \leqq R$ et $A = \lambda$, l'hyperbole limite se réduit à $\cos\omega = 1$, il n'y a aucun point singulier en dehors de la partie positive de l'axe OX.

3. Pour démontrer la réciproque du théorème fondamental, posons

$$\varphi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\left(\frac{z}{\lambda - z}\right)^\nu,$$

λ pouvant être réel ou imaginaire, et $\frac{z}{\lambda - z} = te^{\alpha i}$, t étant supposé tel que la série précédente soit convergente, quel que soit α. N étant un nombre entier, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}\nu h}\varphi_n\left(\frac{\lambda t}{t + e^{-\frac{2\pi i\nu}{N}}}\right) = \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Delta_\mu^n\frac{(n+\mu)!}{n!\,\mu!}t^\mu\sum_{\nu=0}^{N-1}e^{\frac{2\pi i}{N}\nu\mu - h}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_{h+kN}^n\, t^{h+kN}\frac{(n+h+kN)!}{n!\,(h+kN)!}.$$

Supposons que la fonction $f(z)$ n'ait aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A,$$

où

$$\theta|l - R| \geq R - A \geq \theta(l + R), \qquad l = |\lambda|.$$

La première de ces inégalités est toujours vérifiée, car, autrement, le rayon de convergence serait supérieur à R, A et θ étant supposés positifs. La seconde inégalité est vérifiée si A est choisi de façon que la courbe, qui limite la région considérée, ne soit pas tout entière intérieure à la circonférence de convergence, et lui soit au moins tangente.

Dans le cas où $\theta \geq 1$, supposons en outre que le point $z = \infty$ soit un pôle ou un point ordinaire.

En posant $\frac{z}{\lambda - z} = te^{\alpha i}$, on a

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{n+1} f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} t^\nu e^{\nu\alpha i};$$

cette fonction n'a aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$t - \theta < A\left|\frac{1 + te^{\alpha i}}{\lambda}\right|,$$

sauf $te^{\alpha i} = -1$.

Si $\theta < 1$, cette inégalité est vérifiée, quel que soit α, pourvu que $t < \frac{A + l\theta}{A + l}$, valeur comprise entre θ et 1.

Si $\theta > 1$, l'inégalité est toujours vérifiée lorsque $t < \frac{\theta l - A}{l - A}$, valeur supérieure à θ; et, si n est assez grand, $z = \infty$ est un point ordinaire pour $z^{n+1} f^n(z)$ et $\varphi_n(z)$.

Enfin, si $\theta = 1$, pourvu que n soit assez grand, $z = \infty$ sera un point ordinaire pour $\varphi_n(z)$; on peut alors trouver une quantité B telle qu'il n'y ait aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| > B \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{1 + te^{\alpha i}}{\lambda}\right| < \frac{t}{B}.$$

D'autre part, il n'y a aucun point singulier tel que

$$\left|\frac{1+te^{\alpha i}}{\lambda}\right| > \frac{t-1}{A}.$$

Si $\frac{t}{B} > \frac{t-1}{A}$, quel que soit α, l'une de ces inégalités sera vérifiée. Il n'y a donc aucun point singulier tel que $t < \frac{B}{B-A}$.

Ainsi, dans tous les cas, le rayon de convergence de la série en t, qui représente $\varphi_n(z)$ est plus grand que θ. Et, si N augmente indéfiniment, la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta^n_{h+kN}\, \theta^{h+kN} \frac{(n+h+kN)!}{n!\,(h+kN)!}$$

tend vers zéro.

Considérons une circonférence de centre $z = \frac{\lambda\theta}{\theta + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A}{|\theta + e^{-\alpha i}|}$. Un point de cette circonférence sera représenté par

$$\rho e^{\omega i} = \frac{\lambda\theta + A e^{\beta i}}{\theta + e^{-\alpha i}},$$

d'où l'on déduit

$$\theta\,|\lambda - \rho e^{\omega i}| = |\rho e^{\omega - \alpha i} - A e^{\beta i}| \geqq \rho - A,$$

et aucun point intérieur à cette circonférence n'est singulier pour $f^n(z)$. Il en résulte que $\sqrt[n]{\left|\frac{f^n(z)}{n!}\right|}$ a, pour $n = \infty$, une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{A}|\theta + e^{-\alpha i}| = \frac{1}{A}\left|\frac{\lambda}{\lambda - z}\right|$, et celle de $\sqrt[n]{|\varphi_n(z)|}$ est au plus égale à $\frac{1}{A}$. Pourvu que n soit assez grand, on a donc, quel que soit α,

$$\left|\varphi_n\left(\frac{\theta}{\theta + e^{-\alpha i}}\right)\right| < \left(\frac{1}{A-\varepsilon}\right)^n$$

et

$$\left|\Delta^n_h\, \theta^h \frac{(n+h)!}{n!\,h!}\right| < \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left|\varphi_n\left(\frac{\theta\lambda}{\theta + e^{-\frac{2\pi i}{N}\nu}}\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} \Delta^n_{h+kN}\, \theta^{h+kN} \frac{(n+h+kN)!}{n!\,(h+kN)!}\right|;$$

le premier terme est plus petit que $\left(\frac{1}{\lambda - \varepsilon}\right)^n$, le second est aussi petit que l'on voudra et tend vers o lorsque N augmente indéfiniment. Il en résulte que $\sqrt[n]{|\Delta_h^n| \theta^h \frac{(n+h)!}{n!\,h!}}$ est plus petit que $\frac{1}{\lambda - \varepsilon}$, et a, pour $n = \infty$, une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{A}$; ce qui conduit à la réciproque du théorème fondamental :

Si $f(z)$ n'a aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A,$$

où A et θ sont positifs, et si, lorsque $\theta \geqq 1$, le point $z = \infty$ est un pôle ou un point ordinaire, la limite supérieure, pour $n = \infty$, de

$$\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta^\nu}$$

est au plus égale à $\frac{1}{A}$.

6. $\frac{1}{A}$ représentant toujours la limite supérieure, supposée finie, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta^\nu}$, pour $n = \infty$, si $\theta \geqq 1$, il y a au moins un point singulier sur la courbe limite

$$|z| - \theta|\lambda - z| = A;$$

autrement, quel que soit α, il n'y aurait aucun point singulier, non seulement à l'intérieur, mais sur la circonférence de centre

$$z = \frac{\lambda\theta}{\theta + e^{-\alpha i}}$$

et de rayon

$$\frac{A}{|\theta + e^{-\alpha i}|}.$$

On pourrait alors trouver une quantité positive r, telle qu'il n'y ait aucun point singulier intérieur à chacun des cercles de centre z et de

rayon

$$\frac{A}{|\theta + e^{-\alpha i}|} + r \geqq \frac{A + r|\theta - 1|}{|\theta + e^{-\alpha i}|};$$

il n'y aurait donc aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A + r|\theta - 1|$$

et la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta^\nu}$, pour $n = \infty$, serait au plus égale à

$$\frac{1}{A + r|\theta - 1|} < \frac{1}{A}.$$

De même, lorsque $\theta = 1$, si $z = \infty$ est un pôle ou un point ordinaire, il y a au moins un point singulier sur la courbe limite

$$|z| - \theta|\lambda - z| = A.$$

On peut, en effet, trouver une quantité positive B, telle qu'il n'y ait aucun point singulier dont le module soit supérieur à B, sauf le pôle $z = \infty$. Si aucun point de la branche d'hyperbole

$$|z| - \theta|\lambda - z| = A$$

n'était singulier, on pourrait trouver une quantité r telle qu'il n'y ait aucun point singulier à l'intérieur de chaque cercle de centre $\frac{\lambda}{1 + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A}{|1 + e^{-\alpha i}|} + r = \frac{A + 2r\cos\frac{\alpha}{2}}{|1 + e^{-\alpha i}|}$ où $-\pi < \alpha < \pi$. Considérons une circonférence de centre $\frac{\lambda}{1 + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $\frac{A'}{|1 + e^{-\alpha i}|}$ où $A' > A$. Elle est tangente à la branche d'hyperbole $|z| - |\lambda - z| = A'$, et le point de contact, $\rho e^{\omega i}$, est déterminé par les relations

$$|\rho e^{\omega i} - \lambda| = \rho - A', \qquad \rho e^{\omega i} - \lambda = A' e^{\beta i} - \rho e^{(\omega - \alpha)i},$$

d'où l'on déduit

$$\beta = \omega - \alpha, \qquad |\lambda| = |\rho e^{\alpha i} + \rho - A'|,$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{l^2 - A'^2}{\rho(\rho - A')}.$$

Si $4\cos^2\frac{\alpha}{2} < \frac{l^2 - A'^2}{B(B - A')}$, on a

$$\rho > B,$$

et le point de contact ne peut pas être singulier.

Si $4\cos^2\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{l^2 - A'^2}{B(B - A')}$, on a

$$2r\cos\frac{\alpha}{2} \geqq r\sqrt{\frac{l^2 - A'^2}{B(B - A')}},$$

et aucun de ces points de contact ne sera singulier, si A' est choisi de façon que

$$A + r\sqrt{\frac{l^2 - A'^2}{B(B - A')}} > A' > A.$$

Si A' est la plus petite racine positive de l'équation

$$(A' - A)^2(A' - B)B = r^2(A'^2 - l^2),$$

racine qui est comprise entre A et l, il n'y a aucun point singulier tel que

$$|z| - |\lambda - z| < A'$$

et la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}}$ serait au plus égale à $\frac{1}{A'}$, qui est plus petit que $\frac{1}{A}$.

Cette démonstration suppose $A < l$, pour que $l > A' > A$. Mais si $A = l$, le point $z = +R$ est singulier et se trouve sur la courbe limite, qui se réduit à $\omega = 0$.

On peut dire que, dans tous les cas, pourvu que $A > 0$, il y a un point singulier sur la courbe limite $|z| - \theta|\lambda - z| = A$; mais, si $\theta = 1$, ce point peut être $z = \infty$, qui alors n'est pas un pôle.

7. λ étant supposé fixe, à chaque valeur de θ correspond une valeur de A, qui devient nulle lorsque $\frac{1}{A} = \infty$. Si θ augmente, A ne croît

jamais. Si $A > 0$ il n'y a aucun point singulier, tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A.$$

Si z est un point singulier, on aura

$$A = 0$$

pour toute valeur de $\theta \geqq \left|\frac{z}{\lambda - z}\right|$. De même, si $z = \infty$ n'est pas un pôle ou un point ordinaire, lorsque $\theta > 1$, on a

$$A = 0.$$

Si $z = \lambda$ est le seul point singulier de $f(z)$, ce qui suppose $|\lambda| = R$, $z = \infty$ pouvant être un pôle, on aura

$$A = R,$$

quel que soit θ. Mais, s'il y a au moins un point singulier autre que $z = \lambda$, il existera une valeur de θ au delà de laquelle $A = 0$. Soit θ cette valeur telle que $A > 0$ lorsque $\theta < \theta'$, et $A = 0$ lorsque $\theta > \theta'$. Il ne peut y avoir aucun point singulier tel que

$$|z| - \theta'|\lambda - z| < 0,$$

car autrement, à la valeur $\theta = \left|\frac{z}{\lambda - z}\right| < \theta'$ correspondrait $A = 0$. Si $\theta' > 1$, $z = \infty$ est un point ordinaire ou un pôle.

Il y a au moins un point singulier tel que

$$|z| = \theta'|\lambda - z|.$$

En effet, si $\theta' \geqq 1$ et si aucun de ces points n'était singulier, on pourrait trouver une quantité r telle qu'il n'y ait aucun point singulier intérieur aux cercles de centre $z = \frac{\lambda\theta'}{\theta + e^{\alpha i}}$ et de rayon r. Si $\theta - \theta'$ est assez petit, il n'y aura aucun point singulier intérieur aux cercles de

centre $z = \frac{\lambda\theta}{\theta + e^{-\alpha i}}$ et de rayon $r - \left|\lambda \frac{\theta - \theta'}{(\theta + e^{-\alpha i})(\theta' + e^{-\alpha i})}\right|$ supposé positif, car ces cercles sont intérieurs aux précédents. Quel que soit α, ce rayon est au moins égal à

$$\frac{1}{|\theta + e^{-\alpha i}|}\left(r|\theta - 1| - \left|\lambda \frac{\theta - \theta'}{\theta' - 1}\right|\right);$$

il n'y aura donc aucun point singulier, tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < r|\theta - 1| - \left|\lambda \frac{\theta - \theta'}{\theta' - 1}\right|,$$

pourvu que

$$r|\theta - 1||\theta' - 1| > |\lambda||\theta - \theta'|,$$

ce qui a lieu si $r(\theta' - 1) < l$,

$$\theta' < \theta < \frac{l\theta' - r(\theta' - 1)}{l - r(\theta' - 1)},$$

et l'on pourrait trouver une valeur $\theta > \theta'$, telle que

$$A > 0.$$

Si $\theta = 1$, le point $z = \infty$ peut être considéré comme situé sur la droite $|z| = |\lambda - z|$. Si $z = \infty$ est un pôle, et si aucun point de cette droite n'est singulier, on pourra trouver deux quantités B et r, telles qu'il n'y ait aucun point singulier vérifiant l'une des inégalités

$$\rho \leqq B, \qquad \rho\cos(\omega - \gamma) < \frac{l}{2} + r, \qquad \text{où} \qquad \lambda = le^{\gamma i}.$$

Si l'on prend

$$1 < \theta < \frac{B}{\sqrt{B^2 - 2rl}} \qquad \text{et} \qquad A = B - \theta\sqrt{B^2 - 2rl} > 0,$$

il n'y a aucun point singulier tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A;$$

car, si $|z| < B$, on en déduit

$$2\rho\cos(\omega-\gamma) < \frac{l^2+B^2-\left(\frac{B-A}{\theta}\right)^2}{l} = l+2r.$$

On aurait donc

$$A > 0,$$

pour une valeur $\theta > 1$.

Il y a donc, dans tous les cas, au moins un point singulier sur la courbe limite $|z| = \theta'|\lambda - z|$. Mais, si $\theta = 1$, ce point peut être $z = \infty$.

8. Tant que $\theta \gtrless 1$, A varie d'une façon continue avec θ. Soient, en effet, deux valeurs $\theta_2 > \theta_1$, auxquelles correspondent A_2 et A_1, $A_1 \geqq A_2 > 0$. Les deux courbes c_1 et c_2

$$|z| - \theta_1|\lambda - z| = A_1, \qquad |z| - \theta_2|\lambda - z| = A_2,$$

se coupent toujours en deux points réels, symétriques par rapport au rayon qui passe par le point λ, qui ne peuvent être intérieurs à la circonférence de convergence; car autrement celle de ces courbes qui coupe la circonférence de convergence le plus près du point $z = -1$ ne contiendrait aucun point singulier. On a, pour ces points communs,

$$\rho_1 = \frac{A_1\theta_2 - A_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1},$$

et il faut

$$\rho_1 \geqq R.$$

Si $\theta_1 < 1$, le module ρ d'un point de la première courbe augmente jusqu'à la valeur $\frac{A_1 + l\theta_1}{1-\theta_1}$, et il faut $\rho_1 \leqq \frac{A_1 + l\theta_1}{1-\theta_1}$. On en déduit les deux conditions

$$(R - A_1)\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1} \leqq A_1 - A_2 \leqq (A_1 + l)\frac{\theta_2-\theta_1}{1-\theta_1}.$$

Si $\theta_1 > 1$, on obtient de même la condition

$$\rho_1 \leqq \frac{l\theta_1 - A_1}{\theta_1 - 1}$$

et

$$(R - A_1)\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1} \leqq A_1 - A_2 \leqq (l - A_1)\frac{\theta_2 - \theta_1}{1 - \theta_1}.$$

Donc, si $\theta_1 \gtrless 1$, $A_1 - A_2$ tend vers zéro avec $\theta_2 - \theta_1$, et A varie d'une façon continue.

Soit $z = \rho e^{\omega i}$ un point de la courbe c_1, on a

$$\rho - \theta_1 |\lambda - z| = A_1 \qquad \text{et} \qquad \rho - \theta_2 |\lambda - z| = \frac{A_1\theta_2 - \rho(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1},$$

qui diminue quand ρ augmente. Donc sur la courbe c_1 il n'y a aucun point singulier tel que $\rho > \rho_1$ et il y en a au moins un tel que $\rho \leqq \rho_1$.

De même, sur la courbe c_2, il n'y a aucun point singulier tel que $\rho < \rho_1$, et il y en a au moins un tel que $\rho \geqq \rho_1$.

Soit une nouvelle valeur $\theta_3 > \theta_2$, pour laquelle on a

$$A_3 > 0,$$

et soit

$$\rho_2 = \frac{A_2\theta_3 - A_3\theta_2}{\theta_3 - \theta_2}.$$

Sur la courbe c_2 il n'y a aucun point singulier tel que $\rho > \rho_2$; on a donc

$$\rho_1 \leqq \rho_2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\rho_1 - A_2}{\theta_2} \leqq \frac{\rho_1 - A_3}{\theta_3}, \qquad \begin{vmatrix} \theta_1 & A_1 & 1 \\ \theta_2 & A_2 & 1 \\ \theta_3 & A_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\rho_1 = \rho_2$, l'un des deux points communs aux trois courbes est singulier, et la courbe c_2 ne contient pas d'autres points singuliers que ces deux points symétriques, définis par les équations

$$\rho = \rho_1, \qquad |\lambda - z| = \frac{A_1 - A_2}{\theta_2 - \theta_1}.$$

La circonférence de convergence peut remplacer la première des

courbes c, et si

$$\rho_1 = \frac{A_1\theta_2 - A_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} = R,$$

l'un des deux points $Re^{(\gamma\pm\Omega)i}$ est singulier, Ω étant donné par la relation

$$4lR\sin^2\frac{\Omega}{2} = \left(\frac{R - A_1}{\theta_1}\right)^2 - (l - R)^2.$$

θ ayant une valeur donnée, s'il y a un point singulier tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| \leqq 0,$$

on aura

$$A = 0.$$

Si non, A sera égal à la plus petite des valeurs de $|z| - \theta|\lambda - z|$, où z est l'un quelconque des points singuliers de $f(z)$. Il ne peut y avoir d'exception à cette règle que pour $\theta = 1$, si $z = \infty$ est un point singulier; dans ce cas, l'hyperbole $|z| - |\lambda - z| = A$ passe par $z = \infty$ quel que soit A, et cela n'indique rien sur la valeur de A.

9. Pour simplifier la discussion, supposons λ réel, ce qui revient à changer de variable de façon à augmenter ω de γ.

Si $z = -R$ est un point singulier, pourvu que $\rho \geqq R$ et $\theta < 1$, on a

$$\rho - \theta|l - \rho e^{\omega i}| \geqq \rho - \theta(l + \rho) \geqq R - \theta(l + R),$$

alors

$$A = R - \theta(l + R),$$

et, si $\theta > \frac{R}{l + R}$,

$$A = 0.$$

Dans ce cas, toutes les courbes c sont intérieures à la circonférence de convergence.

z étant un point singulier quelconque de $f(z)$, posons

$$|z| = \rho, \qquad |l - z| = M.$$

Soit $z_0 = Re^{\pm\omega_0 i}$ le point singulier de la circonférence de conver-

gence le plus rapproché de $z = -R$, que nous supposons non singulier. Posons, pour plus de symétrie dans les formules,

$$R = \rho_0, \qquad |l - z_0| = M_0.$$

Si tous les points singuliers sont tels que $\frac{\rho}{M} \geqq \frac{\rho_0}{M_0}$, pourvu que $\theta < \frac{\rho_0}{M_0}$, on a

$$\rho - \theta M \geqq \rho_0 - \theta M_0;$$

car si $M > M_0$, on a

$$\rho - \theta M \geqq M\left(\frac{\rho_0}{M_0} - \theta\right) > \rho_0 - \theta M_0,$$

si $M \leqq M_0$, comme $\rho \geqq \rho_0$, on a encore

$$\rho - \theta M \geqq \rho_0 - \theta M_0.$$

Il en résulte que

$$A = \rho_0 - \theta M_0,$$

et, si $\theta \geqq \frac{\rho_0}{M_0}$,

$$A = 0.$$

S'il y a des points singuliers tels que $\frac{\rho}{M} < \frac{\rho_0}{M_0}$, supposons d'abord qu'ils soient tous isolés, et représentons-les par des points de coordonnées ρ, M, par rapport à deux axes rectangulaires. Considérons une droite issue du point $\rho_0 M_0$ parallèle à l'axe des M dans le sens positif, et faisons-la tourner autour de ce point, vers l'axe des ρ, jusqu'à ce qu'elle rencontre un point singulier $\rho_1 M_1$. Si plusieurs points sont sur cette première droite, on choisira la plus grande valeur de ρ_1. On fera ensuite tourner cette droite autour du point $\rho_1 M_1$ jusqu'à ce qu'elle passe par un autre point singulier $\rho_2 M_2$, et ainsi de suite tant que $\frac{M}{\rho}$ va en croissant. On forme ainsi un polygone convexe de sommets

$$\rho_0 M_0, \quad \rho_1 M_1, \quad \ldots \quad \rho_k M_k,$$

tels que

$$\frac{M_0}{\rho_0} < \frac{M_1}{\rho_1} < \ldots < \frac{M_k}{\rho_k}, \qquad \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_k, \qquad M_0 < M_1 < \ldots < M_k.$$

Si $\rho_{\nu-1} M_{\nu-1}$ et $\rho_\nu M_\nu$ sont deux sommets consécutifs, ρM un point singulier quelconque, on a

$$\begin{vmatrix} \rho_\nu & M_\nu & 1 \\ \rho_{\nu-1} & M_{\nu-1} & 1 \\ \rho & M & 1 \end{vmatrix} \geqq 0, \qquad \frac{M}{\rho} \leqq \frac{M_k}{\rho_k}.$$

Soit

$$\theta_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{M_1 - M_0}, \quad \theta_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{M_2 - M_1}, \quad \ldots, \quad \theta_k = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{M_k - M_{k-1}}, \quad \theta_{k+1} = \frac{\rho_k}{M_k},$$

on a

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k < \theta_{k+1}.$$

Soit

$$\theta_\nu < \theta < \theta_{\nu+1}.$$

Si, par le point $\rho_\nu M_\nu$, on mène une droite parallèle à la direction $\rho = M\theta$, tous les points singuliers (ρ, M) sont situés du même côté de cette droite, celui de $\rho = +\infty$, et l'on a

$$\rho - M\theta > \rho_\nu - M_\nu\theta.$$

Donc, si $0 < \theta \leqq \theta_1$, on a

$$A = \rho_0 - M_0\theta;$$

en général, si $\theta_\nu \leqq \theta \leqq \theta_{\nu+1}$,

$$A = \rho_\nu - M_\nu\theta,$$

et, si $\theta \geqq \theta_{k+1}$,

$$A = 0.$$

Si les points singuliers de $f(z)$ ne sont pas tous isolés, le polygone convexe que nous avons formé sera remplacé, en totalité ou en partie, par une courbe convexe, lieu d'une suite de points (ρ, M). A un point de cette courbe correspond la valeur $\theta = \frac{d\rho}{dM}$, pour laquelle $A = \rho - M\theta$.

Si $\theta_{k+1} > 1$, A varie d'une façon continue, même pour les valeurs voisines de $\theta = 1$. Il en est de même si $\theta_{k+1} = 1$, ρ_k étant fini, car alors,

si θ tend vers 1, A tend vers zéro, et $A = 0$ lorsque $\theta \geq 1$. Mais, si tous les points singuliers sont tels que $\frac{\rho}{M} > 1$, $z = \infty$ étant singulier, le dernier côté du polygone sera une droite passant par le point (ρ_{k-1}, M_{k-1}) et parallèle à la direction $\rho = M$. Alors, si $\theta_{k-1} \leq \theta < 1$,

$$A = \rho_{k-1} - \theta M_{k-1},$$

lorsque θ tend vers 1, A tend vers $\rho_{k-1} - M_{k-1} > 0$: si $\theta > 1$,

$$A = 0;$$

et pour $\theta = 1$, A peut avoir l'une quelconque des valeurs comprises entre zéro et $\rho_{k-1} - M_{k-1}$. Il en est de même si le polygone devient une courbe convexe asymptote à la droite $\rho - M = A' > 0$, car A tend vers A' lorsque θ tend vers 1. Si $A' = 0$, A reste continu pour $\theta = 1$.

Inversement, si l'on connaît la valeur A qui correspond à chaque valeur θ, on aura une série de courbes c,

$$\rho - \theta M = A.$$

Deux courbes infiniment voisines se coupent en deux points symétriques déterminés par les valeurs

$$M = -\frac{dA}{d\theta}, \qquad \rho = A - \theta \frac{dA}{d\theta}.$$

L'un de ces deux points est singulier. Ces points peuvent former une suite continue, ou une série de points isolés. Dans ce dernier cas, on réunira deux points consécutifs par la courbe $\rho - \theta M = A$ qui passe par ces points. La dernière courbe ainsi obtenue sera $\rho = \theta M$. On obtient ainsi une courbe, ou une suite de courbes, qui limite une région du plan dans laquelle la fonction ne peut avoir aucun point singulier.

10. Cherchons, en particulier, les points singuliers de la circonférence de convergence. On a vu que $\frac{R - A}{\theta}$ ne décroît jamais, quand θ croît. Supposons que θ tende vers zéro.

Si, pour deux valeurs θ_1 et θ_2,

$$\frac{R - A_1}{\theta_1} = \frac{R - A_2}{\theta_2},$$

$\frac{R - A}{\theta}$ reste constant entre o et θ_2, et l'un des deux points tels que $|z| = R$, $|\lambda - z| = \frac{R - A_1}{\theta_1}$ est singulier.

Soit $\lambda = le^{\gamma i}$,

$$4Rl\sin^2\frac{\Omega}{2} = \left(\frac{R - A_1}{\theta_1}\right)^2 - (l - R)^2,$$

il n'y a aucun point singulier sur la circonférence de convergence entre les points d'argument $\gamma + \Omega$ et $2\pi + \gamma - \Omega$. Il n'y a même aucun point singulier intérieur à la courbe $|z| - \theta_2|\lambda - z| = A_2$. Au point où cette courbe coupe la circonférence de convergence, l'angle V des deux tangentes est donné par la relation

$$\operatorname{tang} V = \frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{\theta_2 l \sin\Omega}{|l - Re^{\Omega i}| + \theta_2(l\cos\Omega - R)},$$

si $\Omega > o$, $V > o$.

Si $R = l$, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\theta\cos\frac{\Omega}{2}}{1 - \theta\sin\frac{\Omega}{2}} \qquad \text{et} \qquad V > o,$$

pourvu que $\theta > o$.

Si $R - l \gtrless o$ et $\Omega = o$, on a

$$A = R - \theta|R - l| \qquad \text{et} \qquad \theta < \frac{R}{|R - l|};$$

la courbe $|z| - \theta|\lambda - z| = A$ est tangente à la circonférence de convergence au point $z = Re^{\gamma i}$. Son rayon de courbure en ce point est

$$r = \frac{R|R - l|}{|R - l| - \theta R}.$$

Si $\theta < \frac{|R - l|}{R}$, une circonférence tangente à la circonférence de

convergence au point $Re^{\gamma i}$ aura les parties voisines de ce point comprises entre la courbe et la circonférence de convergence, pourvu que son rayon soit plus petit que r. Cela a même lieu pour toute cette circonférence si son rayon est assez petit.

Lorsque θ tend vers zéro, si $\frac{R-A}{\theta}$ ne reste jamais constant, cette quantité décroît constamment et a une limite L. On a alors

$$4Rl\sin^2\frac{\Omega}{2} = L^2 - (l-R)^2.$$

L'un des points $Re^{\gamma\pm\Omega i}$ est singulier et n'est pas isolé; il y a des points singuliers infiniment voisins entre la circonférence et toute droite, non tangente, issue de ce point, du côté du point $Re^{\gamma i}$.

Si $L = |l - R|$, on a

$$\Omega = 0,$$

$Re^{\gamma i}$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence. Si $\frac{R-A}{\theta}$ ne devient égal à L qu'à la limite, ce point singulier n'est pas isolé. Si $l = R$, il y a des points singuliers infiniment voisins entre la circonférence de convergence et deux droites symétriques non tangentes issues de ce point. Si $l \gtrless R$, il y a même des points singuliers infiniment voisins entre la circonférence de convergence et toute circonférence de rayon plus grand, tangente en ce point singulier.

Réciproquement, pour exprimer que la circonférence de convergence ne contient aucun point singulier entre ceux d'argument α et $\alpha + \beta$, l'un de ces deux points étant singulier, on choisira

$$\lambda = le^{\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-\pi\right)i};$$

il est alors nécessaire et suffisant que $\frac{R-A}{l}$ ait, pour $\theta = 0$, une limite égale à

$$(l-R)^2 + 4Rl\cos^2\frac{\beta}{4}.$$

Pour que la circonférence de convergence ne contienne que le point

singulier $Re^{\gamma i}$, il faut et il suffit que $\frac{R-A}{\theta}$ ait pour limite $|l-R|$, pour $\theta=0$, lorsque $\lambda=le^{\gamma i}$. On a même

$$\frac{R-A}{\theta}=|l-R|,$$

pourvu que θ soit assez petit, sans être nul, lorsque ce point singulier est isolé dans une région comprise entre la circonférence de convergence et une circonférence tangente, si $l \gtrless R$. Si $l=R$, $R-A$ devient égal à zéro, sans que θ soit nul, pourvu que $Re^{\gamma i}$ soit un point singulier isolé entre la circonférence de convergence et deux directions non tangentes.

11. Pour montrer comment on peut appliquer ces résultats, considérons le cas où a_n est une fonction rationnelle de n.

Soit la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+a},$$

a pouvant être réel ou imaginaire.

Le terme z^{-a} étant supprimé dans le cas où a est entier négatif. On a, en prenant $\lambda=1$:

$$\Delta_1^n=\frac{-1}{(n+a)(n+a+1)},$$

$$\Delta_2^n=\Delta_1^{n+1}-\Delta_1^n=\frac{2}{(n+a)(n+a+1)(n+a+2)},$$

et, en général,

$$\Delta_\nu^n=(-1)^\nu\frac{\nu!}{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+\nu)}.$$

Si $|a|=\alpha$,

$$|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu<\frac{(n+\nu)!}{n!(n-\alpha)(n+1-\alpha)\ldots(n+\nu-\alpha)}\theta^\nu.$$

Si $\theta<1$ et $n>\frac{\alpha}{1-\theta}$, cette expression diminue quand ν augmente :

on a donc

$$A = 1.$$

Si la partie réelle de a est positive,

$$\left|\frac{n+\nu}{n+\nu+a}\right| < 1.$$

$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$ diminue quand ν augmente, et $A = 1$ pour $\theta = 1$.

Si la partie réelle de a est négative,

$$\left|\frac{n+\nu}{n+\nu+a}\right| > 1,$$

pourvu que n dépasse un nombre déterminé fixe, $|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$ augmente indéfiniment avec ν et $A = 0$ pour $\theta = 1$.

De même, si $\theta > 1$, $A = 0$, quel que soit a.

La fonction ne peut avoir aucun point singulier en dehors de la partie positive de l'axe OX; car si $z = \rho e^{\omega i}$ est singulier, lorsque $1 > \theta > \frac{\rho - 1}{|z-1|}$, on a

$$A \leqq \rho - \theta\,|1 - z| < 1.$$

$z = 1$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence. $z = \infty$ est aussi singulier; autrement on pourrait trouver une valeur $\theta > 1$ pour laquelle A ne serait pas nul.

Il est du reste facile de vérifier que ces deux points singuliers sont les seuls de la fonction, car elle vérifie l'équation différentielle

$$z\frac{dy}{dz} + ay = \frac{1}{1-z}.$$

Soit la série

$$\sum \frac{z^n}{(n+a)^p},$$

où p est entier. En formant les différences successives, on a

$$\Delta_\nu^n = \frac{(-1)^\nu \nu!}{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+\alpha+\nu)} \sum \frac{1}{n_1 . n_2 \ldots n_{p-1}},$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}$ représentent $p-1$ des $\nu+1$ quantités $n+a$, $n+a+1, \ldots, n+a+\nu$, et Σ la somme de toutes ces expressions, deux ou plusieurs de ces quantités $n_1, n_2, \ldots$ pouvant être égales dans un même terme. α étant le module de a, on a

$$\Delta_\nu^n \cdot \frac{(n+\nu)}{n!\,\nu!}\theta^\nu < \frac{(n+\nu)\theta^\nu}{n!\,(n-\alpha)\ldots(n-\alpha+\nu)}\,\frac{(p+\nu-1)!}{\nu!\,(p-1)!\,(n-\alpha)^{p-1}}.$$

Si $\theta < 1$ et $\nu > \frac{\theta(p-1)}{1-\theta} + \varepsilon$, cette expression diminue quand ν augmente, pourvu que n soit assez grand. Il en résulte que $A = 1$.

Si $\theta > 1$, en posant $a = \alpha e^{\beta i}$, on a

$$\frac{1}{n+a+\mu} = \frac{n+\mu+\alpha e^{-\beta i}}{(n+\mu)^2+\alpha^2+2\alpha(n+\mu)\cos\beta},$$

dont l'argument $\omega < \frac{\alpha}{n+\mu-\alpha}$, car $\operatorname{tang}\omega = \frac{-\alpha\sin\beta}{n+\mu+\alpha\cos\beta}$. Chacun des termes $\frac{1}{n_1 . n_2 \ldots n_{p-1}}$ a donc un argument plus petit en valeur absolue que $\frac{\alpha(p-1)}{n-\alpha}$ et un module plus grand que $\frac{1}{(\nu+n+\alpha)^{p-1}}$; il en résulte que $\sum \frac{1}{n_1 . n_2 \ldots n_{p-1}}$ a un module plus grand que

$$\frac{(p+\nu-1)!}{\nu!\,(p-1)!}\,\frac{1}{(\nu+n+\alpha)^{p-1}}\cos\frac{\alpha(p-1)}{n-\alpha}$$

et

$$\Delta_\nu^n \cdot \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu > \frac{(n+\nu)!\,\theta^\nu}{n!\,(n+\alpha)\ldots(n+\alpha+\nu)}\,\frac{(p+\nu-1)!}{\nu!\,(p-1)!}\,\frac{\cos\frac{\alpha(p-1)}{n-\alpha}}{(\nu+n+\alpha)^{p-1}},$$

expression qui augmente indéfiniment avec ν. Donc $A = 0$. Il en résulte que la fonction n'a aucun point singulier en dehors de l'axe OX, et que les deux points $z = 1$ et ∞ sont singuliers.

Si a_n est une fraction rationnelle de n, que l'on décompose en fractions simples, Δ_ν^n est la somme des différences de ces fractions; il en résulte que $A = 1$ lorsque $\theta < 1$, et qu'il n'y a aucun point singulier en dehors de la partie positive de OX; $z = 1$ est singulier.

Cet exemple permet d'expliquer pourquoi le calcul des différences

n'indique rien sur la nature des points situés sur OX entre les deux points singuliers $z = 1$ et $+\infty$. La fonction $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n+a}$ vérifie l'équation différentielle

$$z\frac{dy}{dz} + ay = \frac{1}{1-z},$$

dont la solution générale est

$$y = \sum \frac{z^n}{n+a} + Cz^{-a}.$$

Si z peut varier arbitrairement, lorsqu'on aura fait le tour du point $z = +1$, la fonction change de nature, le terme cz^{-a} s'ajoutant à la série, et $z = 0$ devient un point singulier. Les résultats que nous avons obtenus ne s'appliquent donc à la fonction qu'à condition de considérer l'axe OX, entre $+1$ et $+\infty$, comme une coupure. Si non, la fonction ne serait même pas développable en série.

Par exemple, si $a = \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \mathrm{L}\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}},$$

où, pour $z = 0$,

$$\mathrm{L}\,1 = 0;$$

lorsque la variable z fait le tour du point $z = 1$ dans le sens positif, la fonction est augmentée de $\frac{-2\pi i}{\sqrt{z}}$ et $z = 0$ devient un point singulier.

12. Pour chercher la limite supérieure de $\sqrt[n]{\left|\Delta_\nu^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu\right|}$, nous avons supposé que ν prenait toutes les valeurs positives pour chaque valeur de n. Cela peut être évité lorsque $\theta < \frac{R}{R+l}$. Dans ce cas, en effet, si n est assez grand, on a

$$\Delta_\nu^n < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n \left(1 + \frac{l}{R} + l\varepsilon\right)^\nu$$

et

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\,\theta^\nu < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\,\theta^\nu\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)^\nu,$$

expression qui augmente avec ν, tant que $\frac{n+\nu}{\nu}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right) > 1$, puis elle diminue.

En remarquant que $n^n\nu^\nu\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}$ est un des termes du développement de $(n+\nu)^{n+\nu}$, on a

$$\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} < \frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n\nu^\nu}.$$

Si l'on ne donne à ν que des valeurs telles que

$$\frac{\nu}{n} = k < \theta\,\frac{R+l}{R-\theta(R+l)},$$

$\frac{n+\nu}{\nu}\theta\left(1+\frac{l}{R}\right)$ reste supérieur à 1, et l'on a

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\,\theta^\nu < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n (1+k)^n \left[\frac{1+k}{k}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)\right]^{kn},$$

et la limite supérieure, pour $n=\infty$, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$, où $\nu = kn$, sera au plus égale à

$$\frac{1+k}{R}\left(\frac{1+k}{R}\theta\frac{R+l}{k}\right)^k.$$

De même, si $\frac{\nu}{n} > k > \theta\frac{R+l}{R-\theta(R+l)}$, on peut supposer ε assez petit pour que $\frac{n+\nu}{\nu}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)$ reste plus petit que 1. On a alors

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\,\theta^\nu < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^n (1+k)^n \left[\frac{1+k}{k}\theta\left(1+\frac{l}{R}+l\varepsilon\right)\right]^{kn},$$

et si ν ne prend que des valeurs telles que $\nu = kn$, la limite supérieure

de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu''|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ sera au plus égale à

$$\frac{1+k}{R}\left(\frac{1+k}{R}\theta\frac{R+l}{k}\right)^k.$$

Posons

$$\left(\frac{1+k}{R}\right)^{1+k}\left(\theta\frac{R+l}{k}\right)^k=\frac{1}{V},$$

où

$$R-\theta|l-R|\geqq A'\geqq R-\theta(l+R).$$

L'expression $(1+k)L\frac{1+k}{R}+kL\theta\frac{R+l}{k}$ a pour dérivée par rapport à k

$$L\theta\frac{1+k}{k}\frac{R+l}{R},$$

qui est positif lorsque $k<\frac{R+l}{R-\theta(R+l)}$.

Quand k croît de zéro à cette valeur, $\left(\frac{1+k}{R}\right)^{1+k}\left(\theta\frac{l+R}{k}\right)^k$ croît de $\frac{1}{R}$ à $\frac{1}{R-\theta(R+l)}$; si k continue à croître, elle décroît et tend vers zéro pour $k=\infty$. Elle prend donc la valeur $\frac{1}{A'}$ pour deux valeurs k' et k'', l'une inférieure, l'autre supérieure à $\theta\frac{R+l}{R-\theta(R+l)}$. Lorsque ν ne prend que des valeurs non comprises entre $k'n$ et $k''n$, $\sqrt[n]{|\Delta_\nu''|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ a une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{A'}$. Donc si, lorsque ν reste compris entre $k'n$ et $k''n$, on trouve une limite supérieure égale à $\frac{1}{V}$, ou plus grande, elle restera la même quel que soit ν.

En particulier, l'équation $\left(\frac{1+k}{R}\right)^{1+k}\left(\theta\frac{l+R}{k}\right)^k=\frac{1}{R-\theta|l-R|}$ a deux racines positives k' et k''; dans tous les cas, pourvu que $\theta<\frac{R}{R+l}$, il suffit, pour calculer A, de donner à ν des valeurs comprises entre $k'n$ et $k''n$. Il faut seulement remarquer que, si l'on trouvait ainsi une

valeur plus grande que $R - \theta|l - R|$, on devrait prendre

$$A = R - \theta|l - R|$$

lorsque ν est arbitraire, car A ne peut pas dépasser cette valeur.

Si $l = R$, cette équation devient

$$(1 + k)^{1+k}\left(\frac{2\theta}{k}\right)^k = 1,$$

$k = 0$ et k'' ne dépend que de θ et croît avec θ. Il suffit alors de faire varier ν entre 0 et kn, en prenant $\theta \leq \frac{k}{2(1+k)^{1+\frac{1}{k}}}$, valeur qui est plus grande que $\frac{k}{2e(1+k)}$.

15. Nous allons appliquer les théories précédentes à un cas assez général où la série n'a qu'un point singulier sur la circonférence de convergence.

Supposons le rayon de convergence égal à 1. $\frac{L|a_n|}{n}$ aura pour limite supérieure zéro, pour $n = \infty$. Supposons, en outre, que a_n soit une fonction analytique $F(n)$, n'ayant aucun point singulier, autre que $n = \infty$, dans un espace limité par deux droites symétriques issues de O, qui forment avec OX des angles aigus, et extérieur à une circonférence de rayon fini. C'est-à-dire que le point $n = \rho e^{\omega i}$ ne sera jamais singulier pour $F(n)$ si $\rho > B$ et $|\omega| \leq \alpha$, où $\sin\alpha = r < 1$, r et B étant fixes. Enfin, la fonction F est supposée telle que $\frac{L|F(\rho e^{\omega i})|}{\rho}$ ait pour limite supérieure zéro, pour $\rho = \infty$, ω prenant toutes les valeurs comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Pourvu que n soit assez grand, et que $\frac{\nu}{n} < r$, $a_{n+\nu}$ pourra se développer sous la forme

$$a_{n+\nu} = A_0 + A_1\frac{\nu}{n} + \ldots + A_k\left(\frac{\nu}{n}\right)^k + \ldots,$$

où les coefficients A ne dépendent que de n. Représentons par D_h^k ce

que devient Δ_h^n quand on y remplace $a_{n+\nu}$ par ν^k, en supposant $\lambda = 1$.

$$D_h^k = h^k - \frac{h}{1}(h-1)^k + \frac{h(h-1)}{1.2}(h-2)^k - \ldots + (-1)^{h-1}\frac{h}{1}1^k,$$

d'où l'on déduit

$$D_h^k = h(D_h^{k-1} + D_{h-1}^{k-1}),$$

$$D_h^1 = 0 \quad \text{si } h > 1, \qquad D_h^2 = h(D_h^1 + D_{h-1}^1) = 0 \quad \text{si } h > 2,$$

et, en général,

$$D_h^k = 0 \quad \text{si } h > k, \qquad D_h^h = h D_{h-1}^{h-1} = h!$$

Enfin, en laissant $k - h$ fixe, on obtient la relation

$$D_h^k = h!\left[1 + D_2^{k-h+1} + \frac{1}{2!}D_3^{k-h+2} + \frac{1}{3!}D_4^{k-h+3} + \ldots + \frac{1}{(h-1)!}D_h^{k-1}\right]$$

et

$$D_h^k > 0 \quad \text{si } k > h.$$

Soit M le maximum du module de $F(n + nre^{\omega i})$, où ω est arbitraire. Dans le développement de $a_{n+\nu}$, on a

$$|A_k| r^k \leqq M.$$

Si $h < rn$, on peut remplacer $a_{n+\nu}$ par son développement dans Δ_h^n, et l'on a

$$\Delta_h^n = A_h \frac{D_h^h}{n^h} + \frac{A_{h+1}}{n^{h-1}} D_h^{h+1} + \ldots,$$

$$|\Delta_h^n| < M \sum_{k=h}^{\infty} \frac{1}{(nr)^k} D_h^k = M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{h}{nr}\right)^k - \frac{h}{1}\left(\frac{h-1}{nr}\right)^h + \ldots + (-1)^{h-1}\frac{h}{1}\left(\frac{1}{nr}\right)^h$$

$$= M\left[\frac{h}{nr-h} - \frac{h}{1}\frac{h-1}{nr-h+1} + \frac{h(h-1)}{1.2}\frac{h-2}{nr-h+2} - \ldots + (-1)^{h-1}\frac{h}{1}\frac{1}{nr-1}\right]$$

$$= M\frac{h!}{(nr-1)(nr-2)\ldots(nr-h)}.$$

Prenons $\theta \leqq \dfrac{r}{2(1+r)^{1+\frac{1}{r}}}$. Pour calculer A, il suffit de donner à ν des

valeurs comprises entre o et $rn - 1$, et

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < M\theta^\nu \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}{(nr-1)(nr-2)\ldots(nr-\nu)},$$

expression qui diminue, si ν augmente, lorsque $\nu < n\frac{r-\theta}{1+\theta}$, puis augmente avec ν; et qui sera maximum pour $\nu = 0$, ou lorsque

$$nr - 1 \geqq \nu > nr - 2.$$

Dans ce dernier cas, on a

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu \leqq M\theta^\nu \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} < M\theta^\nu \frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n\,\nu^\nu}$$
$$< M(1+r)^n \left(\theta\frac{n+nr-2}{nr-2}\right)^{nr-2} < M(1+r)^{\frac{2}{r}} \left[\frac{r}{2\left(r-\frac{2}{n}\right)}\right]^{nr-2} < M,$$

pourvu que n soit assez grand.

Comme $\frac{1}{\rho}L|F(\rho e^{\omega i})|$ a pour limite supérieure o, $\frac{LM}{n}$ a aussi pour limite supérieure o, pour $n = \infty$, et $A = 1$. La série $\Sigma z^n F(n)$ n'a donc aucun point singulier, tel que

$$|z| - \theta|1 - z| < 1, \qquad \theta = \frac{r}{2(1+r)^{1+\frac{1}{r}}},$$

et $z = +1$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence.

14. Ces conditions sont remplies si a_n est une fonction algébrique continue; c'est-à-dire si, à partir d'un rang fini, il existe entre n et a_n une relation algébrique entière, a_n représentant toujours la même branche de cette fonction où n croît d'une façon continue par des valeurs réelles.

Considérons encore la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{n|-1+\cos L n|^\alpha} \qquad \text{où} \qquad 0 < \alpha < 1,$$

$(\mathrm{L}n)^\alpha$ représentant la valeur réelle et positive. a_n est une fonction de n qui n'a que les points singuliers 0, 1, ∞. Si $n = \rho e^{\omega i}$, $\frac{\mathrm{L}|\mathrm{F}(\rho e^{\omega i})|}{\rho}$ est la partie réelle de

$$e^{\omega i}[-1 + \cos(\mathrm{L}\rho + i\omega)^\alpha],$$

ou de

$$\cos\omega[-1 + \cos(\mathrm{L}\rho)^\alpha] - 2e^{\omega i}\sin\frac{(\mathrm{L}\rho + i\omega)^\alpha - (\mathrm{L}\rho)^\alpha}{2}\sin\frac{(\mathrm{L}\rho + i\omega)^\alpha + (\mathrm{L}\rho)^\alpha}{2}.$$

Lorsque ρ devient infini, ω restant fini,

$$(\mathrm{L}\rho + i\omega)^\alpha - (\mathrm{L}\rho)^\alpha = \frac{\left(1 + \frac{i\omega}{\mathrm{L}\rho}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{1}{\mathrm{L}\rho}\right)^\alpha}$$

tend vers zéro.

Il en résulte que son sinus tend vers 0 et $\sin\frac{(\mathrm{L}\rho + i\omega)^\alpha + (\mathrm{L}\rho)^\alpha}{2}$ reste fini. La limite supérieure de $\frac{1}{\rho}\mathrm{L}|\mathrm{F}(\rho e^{\omega i})|$ pour $\rho = \infty$ est donc la même que celle de $\cos\omega[-1 + \cos(\mathrm{L}\rho)^\alpha] \leqq 0$ si $|\omega| < \frac{\pi}{2}$.

La série précédente n'a donc que le point singulier $z = 1$ sur la circonférence de convergence. Soit une suite de termes tels que

$$e^{(2k\pi+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} \leqq n \leqq e^{(2k\pi+2\pi-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

ε étant fixe et k augmentant indéfiniment. Pour ces termes, on a

$$\frac{\mathrm{L}|a_n|}{n} = -1 + \cos(\mathrm{L}n)^\alpha < -1 + \cos\varepsilon.$$

La série qui ne contiendrait que ces termes, les autres étant nuls, aurait un rayon de convergence égal à

$$e^{1-\cos\varepsilon} > 1.$$

Si l'on supprime tous ces termes, en ne conservant que ceux tels que

$$e^{(2k\pi-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} < n < e^{(2k\pi+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

on ne change pas les points singuliers de la circonférence de rayon 1. Si n et n' sont deux termes de deux groupes consécutifs, on a

$$\frac{n'}{n} > e^{(2k\pi+2\pi-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-(2k\pi+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} > e^{2\frac{\pi-\varepsilon}{\alpha}(2k\pi)^{\frac{1}{\alpha}-1}},$$

qui augmente indéfiniment avec k.

Quand on forme Δ_ν^n, pour calculer A, il suffit de prendre $\nu < nr$, si θ est assez petit; et les termes de deux groupes différents n'entreront jamais dans la même différence. Si l'on supprime un nombre quelconque de ces groupes de termes, on a donc encore une série qui n'a que le point singulier $z = 1$ sur la circonférence de rayon 1. Dans cette série, $a_n = 0$, sauf pour des suites de termes consécutifs tels que

$$2k\pi - \varepsilon < (\mathrm{L}n)^\alpha < 2k\pi + \varepsilon,$$

où k prend une suite de valeurs entières, en nombre infini.

On arrive au même résultat en partant de la série plus générale

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathrm{F}(n) e^{n(-1+\cos(\mathrm{L}n)^\alpha)},$$

où $\mathrm{F}(n)$ remplit les conditions posées au n° **13**, et peut être une fonction rationnelle ou algébrique.

13. Ce dernier résultat peut être présenté sous une forme un peu générale. Soit la série

$$\Sigma a_n b_n z^n.$$

Soit

$$\mathrm{D}_\nu^n = \lambda'^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda'^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

$$d_\nu^n = \lambda''^\nu b_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda''^{\nu-1} b_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu b_n.$$

et

$$\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} b_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} b_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu a_n b_n$$

où $\lambda = \lambda'\lambda''$, λ' et λ'' pouvant être arbitraires. En remplaçant les b en

fonction de leurs différences, on a

$$\Delta_\nu^n = \lambda'^\nu D_0^{n+\nu} d_\nu^n + \frac{\nu}{1}\lambda'^{\nu-1} D_1^{n+\nu-1} d_{\nu-1}^n$$
$$+ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda'^{\nu-2} D_2^{n+\nu-2} d_{\nu-2}^n + \ldots + D_\nu^n d_0^n.$$

Si $\sqrt[n]{|D_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^\nu}$ a pour limite supérieure $\frac{1}{A'}$, pour $n = \infty$, $\frac{1}{A''}$ étant celle de $\sqrt[n]{|d_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta''^\nu}$, pourvu que n soit assez grand, on aura

$$|D_\nu^n| < \frac{n!\,\nu!}{(n+\nu)!}\left(\frac{1}{\theta'}\right)^\nu \left(\frac{1}{A'-\varepsilon}\right)^n, \qquad |d_\nu^n| < \frac{n!\,\nu!}{(n+\nu)!}\left(\frac{1}{\theta''}\right)^\nu \left(\frac{1}{A''-\varepsilon}\right)^n$$

et

$$|\Delta_\nu^n| < \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}|\lambda'|^\mu |D_{\nu-\mu}^{n+\mu} d_\mu^n|$$
$$< \frac{n!\,\nu!}{(n+\nu)!}\frac{1}{(A'-\varepsilon)^n (A''-\varepsilon)^n}\left(\frac{1}{\theta'}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu}\left|\frac{\lambda'\theta'}{\theta''(A'-\varepsilon)}\right|^\mu.$$

Si $|\lambda'|\theta' < A'\theta''$, et si ε est assez petit, on aura

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^\nu < \frac{1}{(A'A''-2\varepsilon)^n\left[1 - \frac{|\lambda'|\theta'}{\theta''(A'-\varepsilon)}\right]};$$

$\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^\nu}$ a alors une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{A'A''}$, de sorte que $A \geq A'A''$ pour $\theta = \theta'$.

Supposons $|\lambda'|$ et $|\lambda''|$ égaux aux rayons de convergence R', R'' des deux séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma b_n z^n$. Si la seconde série n'a, sur sa circonférence de convergence, qu'un point singulier $z = \lambda''$, supposé isolé, on aura

$$A' = R'',$$

pourvu que θ'' soit assez petit. Si $z = -\lambda''$ n'est pas un point singulier

de la première série, on a

$$A' > R'(1 - 2\theta'),$$

pourvu que θ' soit assez petit. On peut supposer $\theta'' > \frac{\theta'}{1 - 2\theta'}$ et $\theta = \theta'$; alors $A \geqq A'A'' > R'R''(1 - 2\theta')$, et le point $z = -\lambda'\lambda''$ n'est pas un point singulier pour la série $\Sigma a_n b_n z^n$.

On a toujours $R \geqq R'R''$, et s'il y a des valeurs de n telles que $\sqrt[n]{|a_n|}$ et $\sqrt[n]{|b_n|}$ tendent en même temps vers $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R''}$, $R = R'R''$. Si la série $\Sigma b_n z^n$ n'a que le point singulier $z = 1$ sur la circonférence de convergence de rayon $R'' = 1$, un point $z = R' e^{\omega i}$ non singulier pour la série $\Sigma a_n z^n$ ne peut pas être singulier pour $\Sigma a_n b_n z^n$. Mais un point singulier de la première série peut n'être pas singulier pour la seconde. Si les deux séries $\sum b_n z^n$ et $\sum \frac{1}{b_n} z^n$ n'ont que le point singulier $z = 1$ sur leurs circonférences de convergence, les deux séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma a_n b_n z^n$ auront les mêmes points singuliers sur leurs circonférences de convergence.

Si les deux séries $\Sigma a_n z^n$, $\Sigma b_n z^n$ n'ont chacune qu'un point singulier, λ', λ'', sur leurs circonférences de convergence, la série $\Sigma a^n b_n z^n$ ne peut avoir que le point singulier $\lambda'\lambda''$ sur la circonférence de rayon $R'R''$; et, si $R = R'R''$, ce point est singulier.

16. Supposons $R = 1$, et $\lambda = e^{\gamma i}$. Si $A = 1$, $z = e^{\gamma i}$ est le seul point singulier de la circonférence de convergence. Si $A = 1 - 2\theta$, $z = e^{(\pi+\gamma)i}$ est singulier; si $A > 1 - 2\theta$, ce point n'est pas singulier.

Supposons maintenant que $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta_1^\nu}$ ait pour limite supérieure 1, pour $n = \infty$, lorsque n prend une suite illimitée de valeurs particulières, ν prenant toutes les valeurs entières pour chacune de ces valeurs de n. On a, pour ces valeurs,

$$|\Delta_\nu^n| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \theta_1^\nu < (1 + \varepsilon)^n,$$

où ε est aussi petit que l'on voudra, pourvu que n soit assez grand.

Soit $\lambda' = e^{\gamma' i}$; représentons par $\Delta_\nu(e^{\gamma' i})$, ou Δ'_ν, ce que devient Δ^n_ν, quand λ y est remplacé par λ'. On a

$$\lambda^\nu a_{n+\nu} = \Delta^n_0 + \frac{\nu}{1}\Delta^n_1 + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta^n_2 + \ldots + \Delta^n_\nu,$$

$$\Delta'_\nu = \lambda'^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda'^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda^\nu \Delta'_\nu = \Delta^n_0(\lambda' - \lambda)^\nu + \frac{\nu}{1}\Delta^n_1 \lambda'(\lambda' - \lambda)^{\nu-1}$$
$$+ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta^n_2 \lambda'^2(\lambda' - \lambda)^{\nu-2} + \ldots + \Delta^n_\nu \lambda'^\nu.$$

Si, n étant fixe et ν arbitraire, on suppose que

$$|\Delta^n_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < (1+\varepsilon)^n.$$

il en résulte

$$|\Delta'_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu < (1+\varepsilon)^n \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(n+\nu)!}{(n+\mu)!(\nu-\mu)!}\theta^{\nu-\mu}|\lambda' - \lambda|^{\nu-\mu}$$
$$< (1+\varepsilon)^n[1 + \theta|\lambda' - \lambda|]^{n+\nu}.$$

Soit $\theta' = \frac{\theta}{1+\theta|\lambda'-\lambda|}$ où $\theta \leq \theta_1$; en ne donnant à n que la suite de valeurs que nous avons considérées, $\sqrt[n]{|\Delta'_\nu| \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^\nu}$ aura, pour $n = \infty$, une limite supérieure au plus égale à

$$1 + \theta|\lambda' - \lambda| = \frac{1}{1 - \theta'|\lambda' - \lambda|} < \frac{1}{1 - 2\theta' \cos\frac{\alpha}{2}}$$

si $\alpha - \pi < \gamma' - \gamma < \pi - \alpha$.

Donnons maintenant à γ' les valeurs $2k\frac{\pi}{N}$; on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\lambda h \frac{2\pi i}{N}} \Delta_\nu\left(e^{2k\frac{\pi i}{N}}\right) = N \sum_{\mu} (-1)^{\nu-\mu} \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!} a_{n+\mu},$$

où μ ne prend que les valeurs de la forme $h + kN$ comprises entre o et ν. Si $N > \frac{\nu}{2}$, $\nu - N < h < N$, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-kh\frac{2\pi i}{N}} \Delta_\nu\left(e^{2k\frac{\pi i}{N}}\right) = (-1)^{\nu-h}\frac{\nu!}{h!(\nu-h)!}a_{n+h}.$$

Supposons que le point $z = e^{\gamma i}$ ne soit pas singulier. On peut trouver une quantité positive β, assez petite pour qu'il n'y ait aucun point singulier tel que $|z| - \theta|e^{(\pi+\gamma)i} - z| < 1 - 2\theta + \beta$; car, si β est assez petit, ceux de ces points qui sont hors du cercle de convergence seront aussi voisins que l'on voudra de $z = e^{\gamma i}$. On peut même trouver un arc α, tel qu'il n'y ait aucun point singulier vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|e^{\gamma' i} - z| < 1 - 2\theta + \beta$$

si $+\alpha > \gamma' - \gamma - \pi > -\alpha$; alors, la limite supérieure de

$$\sqrt[n]{|\Delta_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta^\nu}$$

sera au plus égale à $\frac{1}{1-2\theta+\beta}$; et, si γ' n'est pas compris entre $\pi + \gamma \pm \alpha$, n ne prenant que les valeurs considérées, $\sqrt[n]{|\Delta_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta'^\nu}$ aura une limite supérieure au plus égale à $\frac{1}{1-2\theta'\cos\frac{\alpha}{2}}$, où θ' peut être fixe, pourvu que $\theta \leqq \frac{\theta_1}{1+2\theta_1}$. Alors, quel que soit λ', $\sqrt[n]{|\Delta_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta'^\nu}$ aura, pour ces valeurs de n, une limite supérieure plus petite que $\frac{1}{1-2\theta'}$, de même que $\sqrt[n]{|a_{n+h}|\frac{(n+\nu)!}{n!h!(\nu-h)!}\theta'^\nu}$.

$\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}n^n\nu^\nu$ étant le plus grand terme du développement de $(n+\nu)^{n+\nu}$, on a

$$\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!} > \frac{1}{n+\nu+1}\frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n\nu^\nu},$$

$$\frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n h^h(\nu-h)^{\nu-h}} > \frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\frac{\nu!}{h!(\nu-h)!} > \frac{1}{(n+\nu+1)(\nu+1)}\frac{(n+\nu)^{n+\nu}}{n^n h^h(\nu-h)^{\nu-h}}.$$

Supposons que ν et h varient avec n, de façon que $\frac{\nu}{n}$ ait pour limite $\frac{2\theta'}{1-2\theta'}$, $\frac{h}{\nu}$ tendant vers $\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{(n+\nu)!}{n!\,h!\,(\nu-h)!}\theta'^{\nu}}$ aura pour limite $\frac{1}{1-2\theta'}$, et $\sqrt[n]{|a_{n+h}|}$ aura une limite supérieure plus petite que 1. Pour que $\theta' \leqq \frac{\theta_1}{1+2\theta_1}$, il suffit que $\frac{h}{n}$ ait une limite positive égale à $\frac{\theta'}{1-2\theta'} \leqq \theta_1$.

Donc, si $\sqrt[n+h]{|a_{n+h}|}$ a pour limite supérieure 1, lorsque n ne prend que les valeurs particulières considérées, et $n\varepsilon < h < n\theta_1$, où ε est fixe, le point $z = e^{\gamma i}$ est singulier.

Supposons maintenant que, à chaque valeur de n, corresponde un arc γ; on forme Δ_ν^n, où ν est arbitraire, $\lambda = e^{\gamma i}$ variant avec n, qui prend toutes les valeurs entières. Supposons que, dans ces conditions, $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^{\nu}}$ ait pour limite supérieure 1, pour $n = \infty$. Si un arc ω est tel que, pourvu que n soit assez grand, aucun des arcs γ ne soit compris entre $\omega - \alpha$ et $\omega + \alpha$, en prenant $\lambda = e^{\gamma i}$, $\lambda' = e^{(\pi+\omega)i}$, et θ' assez petit, on voit que la limite supérieure de $\sqrt[n]{|\Delta'_\nu|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta'^{\nu}}$ est au plus égale à $\frac{1}{1-2\theta'\cos\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{1-2\theta'}$, et $z = e^{\omega i}$ n'est pas singulier.

Les seuls points de la circonférence de convergence, qui peuvent être singuliers, sont ceux dont les arguments sont les limites de γ. Tous ces points limites sont singuliers, si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1, pour une suite de valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ telles que $\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k}$ reste plus petit qu'une quantité inférieure à θ. Dans tous les cas, un point $e^{\omega i}$ est singulier si l'on peut trouver une suite de valeurs de n telles que γ tende vers ω, pour $n = \infty$, $\sqrt[n+\nu]{|a_{n+\nu}|}$ ayant pour limite supérieure 1, pour ces valeurs infinies de n, lorsque $n\varepsilon < \nu < \theta n$.

17. Soit la série $\Sigma z^n e^{in\varphi(n)}$, où $\varphi(n)$ est réel lorsque n est entier; $\varphi(z)$ étant une fonction analytique qui n'a aucun point singulier, à distance finie, $z = \rho e^{\omega i}$ tel que $\rho > \beta$, $|\omega| < \alpha$. Supposons en outre que $\rho\varphi'(\rho e^{\omega i})$ tende vers zéro lorsque ρ devient infini, pourvu que $|\omega| < \alpha$.

Pour chaque valeur de n, prenons $\lambda = e^{-i\varphi(n)}$. Alors $|\Delta_\nu^n|$ aura la même valeur que lorsque $a_{n+\nu}$ est remplacé par $a'_{n+\nu} = e^{i(n+\nu)[\varphi(n+\nu)-\varphi(n)]}$, avec $\lambda = 1$. On peut alors développer $a'_{n+\nu}$ suivant les puissances de $\frac{\nu}{n}$, comme au n° **13**, si $\frac{\nu}{n} < r = \sin\alpha$. Soit

$$F(n+\nu) = e^{i(n+\nu)[\varphi(n+\nu)-\varphi(n)]},$$

si $n+\nu = \rho e^{\omega i}$, $\left|\frac{\nu}{n}\right| < r$, $\frac{L|F(\rho e^{\omega i})|}{\rho} < |\varphi(n+\nu) - \varphi(n)|$ qui tend vers o, ainsi que $\rho\varphi'(\rho e^{\omega i})$. Les points singuliers de la série situés sur la circonférence de convergence ont alors pour arguments les limites de $-\varphi(n)$.

Par exemple, si $\varphi(n) = \alpha(Ln)^\theta$, on a

$$\rho\varphi'(\rho e^{\omega i}) = \frac{\alpha\theta}{e^{\omega i}(L\rho + i\omega)^{1-\theta}},$$

qui tend vers zéro si $\theta < 1$. Comme $\varphi(n)$ augmente indéfiniment avec n, tous les points de la circonférence sont singuliers.

Si $\varphi(n) = \alpha\sin(Ln)^\theta$, où $0 < \theta < 1$, tous les points compris entre les arcs $-\alpha$ et $+\alpha$ sont singuliers. Si $\alpha < \pi$, les autres points de la circonférence de convergence ne sont pas singuliers.

On arrive au même résultat pour la série $\Sigma a_n z^n e^{in\varphi(n)}$ si les deux séries $\sum a_n z^n$, $\sum \frac{1}{a_n} z^n$ n'ont que le point singulier $z = 1$ sur leur circonférence de convergence; ou encore si a_n est une fonction analytique remplissant les conditions indiquées au n° **13**.

18. Dans la série $f(z) = \sum a_n z^n$, posons $\frac{z}{z-\lambda} = x$.

$$\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda x)^n (x-1)^{-n-1}$$

$$= \sum x^n \left(a_0 - \frac{n}{1}\lambda a_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda^2 a_2 + \ldots + (-1)^n a_n \lambda^n\right)$$

$$= \sum (-x)^n \Delta_n^0.$$

Représentons par $\Delta_\nu'^n$ les différences des coefficients de cette fonction de x, pour $\lambda = 1$. On a

$$\Delta_\nu'^n = (-1)^{n+\nu}\left[\Delta^0_{n+\nu} + \frac{\nu}{1}\Delta^0_{n+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\Delta^0_{n+\nu-2} + \ldots + \Delta^0_n\right];$$

or

$$\lambda\Delta_\nu^{n+1} = \Delta_\nu^n + \Delta_{\nu+1}^n,$$

et l'on en déduit

$$\lambda^\mu\Delta_\nu^{n+\mu} = \Delta_\nu^n + \mu\Delta_{\nu+1}^n + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\Delta_{\nu+2}^n + \ldots + \Delta_{\nu+\mu}^n$$

et

$$\Delta_\nu'^n = (-1)^{n+\nu}\lambda^\nu\Delta_n^\nu.$$

Appliquons à la fonction $\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)f(z)$, développée suivant les puissances de x, les théorèmes précédemment démontrés. $x = \infty$ correspond à $z = \lambda$, $x = 1$ à $z = \infty$. La condition $|z| - \theta|\lambda - z| < A$ est équivalente à $|x| - \frac{A}{|\lambda|}|1 - x| < \theta$. En permutant n et ν, on obtient les résultats suivants :

Si $\sqrt[\nu]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}A^n}$, où n est arbitraire, a, pour $\nu = \infty$, une limite supérieure finie $\frac{1}{\theta}$, il n'y a aucun point singulier tel que

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A,$$

et il y en a au moins un tel que $|z| - \theta|\lambda - z| = A$.

Si $|\lambda| = R$, et si $\theta > 0$ pour $A > R$, le point $z = \lambda$ est un pôle : il n'y a aucun autre point singulier sur la circonférence de convergence, et même dans un cercle de rayon $\frac{A - \theta R}{1 - \theta}$, si $\theta < 1$. Si $\theta = 1$, il ne peut y avoir aucun point singulier autre que $z = \infty$, et le pôle $z = \lambda$.

19. Si $|\lambda| = R = 1$, $\theta < \frac{1}{2}$, et si la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{|\Delta_\nu^n|\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\theta^\nu}$ est $\frac{1}{1 - 2\theta}$, le point $z = -\lambda$ est singulier.

Supposons ν pair, soit $\nu = 2\mu$ et $n + \mu = m$. Dans Δ_ν^n, le plus grand

coefficient est celui du terme moyen $\frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}$. Prenons $\lambda = -1$, et mettons ce coefficient maximum en facteur, en posant

$$\varphi_m = a_m + \frac{\mu}{\mu+1}(a_{m+1} + a_{m-1})$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+1)(\mu+2)}(a_{m+2} + a_{m-2}) + \ldots + \frac{(\mu!)^2}{(2\mu)!}(a_{m+\mu} + a_{m-\mu}).$$

on a

$$\Delta_\nu^n = \frac{(2\mu)!}{(\mu!)^2}\varphi_m.$$

Or,

$$\frac{(n+2\mu)^{n+2\mu}}{n^n(\mu)^{2\mu}} > \frac{(n+2\mu)!}{n!\mu!\mu!} > \frac{1}{(n+2\mu+1)(2\mu+1)}\frac{(n+2\mu)^{n+2\mu}}{n^n\mu^{2\mu}},$$

et, si μ varie avec n, de façon que $\frac{\mu}{n}$ tende vers $\frac{\theta}{1-2\theta}$, ou $\frac{\mu}{m}$ vers $\frac{\theta}{1-\theta}$, $\sqrt[n]{\frac{(n+2\mu)!}{n!\mu!\mu!}\theta^{2\mu}}$ a pour limite $\frac{1}{1-2\theta}$.

Si, pour une suite de valeurs de m, $\sqrt[m]{|\varphi_m|}$ a pour limite supérieure 1, $\sqrt[n]{|\varphi_m|}$ aura la même limite supérieure, et $\sqrt[n]{\Delta_\nu^n\frac{(n+\nu)!}{n!\nu!}\theta^\nu}$ aura pour limite supérieure $\frac{1}{1-2\theta}$, et cela quel que soit n, car $\lambda \geq 1-2\theta$. Comme θ est arbitraire, on voit que, dans φ_m, μ est un nombre entier arbitraire, qui varie avec m, pourvu que $\frac{\mu}{m}$ ne tende pas vers 0. Si alors $\sqrt[m]{|\varphi_m|}$ a pour limite supérieure 1, le point $z=1$ est singulier.

Cette fonction φ_m peut remplacer celle que j'avais introduite dans les deux Mémoires déjà cités, et permet de retrouver tous les résultats auxquels j'ai été conduit précédemment.

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles;

PAR M. J. LE ROUX,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Introduction.

La plupart des propriétés des équations linéaires du second ordre, à deux variables indépendantes, peuvent s'étendre sans difficulté aux équations d'ordre supérieur. Guidé par cette idée j'avais déjà, dans ma Thèse, déposée au commencement de mars 1893 à la Faculté des Sciences de Paris, rédigé quelques-unes des démonstrations de manière à les rendre immédiatement applicables aux équations d'un ordre quelconque.

Je reprends, dans ce travail, l'étude générale des équations linéaires à deux variables indépendantes. Laissant de côté le problème de l'intégration sous forme finie, qui concerne seulement des cas très intéressants sans doute, mais tout à fait exceptionnels, j'ai cherché surtout à déterminer les principales propriétés analytiques des intégrales. Tel est le théorème sur la nature des courbes singulières accidentelles. La démonstration que j'en avais donnée dans ma Thèse exigeait quelques restrictions dans la forme des singularités. Je donne ici une démonstration nouvelle pour laquelle je me suis servi d'une idée ingénieuse de M. Delassus : la notion du *domaine d'un arc de courbe* que j'ai étendue au cas des variables complexes. Pour la détermination des intégrales sur les caractéristiques, j'ai démontré un théorème

général permettant d'étendre aux équations d'ordre supérieur au second la notion des *intégrales principales* dans le cas des caractéristiques simples et même des caractéristiques multiples lorsque certaines conditions se trouvent réalisées. On peut obtenir ainsi une représentation des intégrales qui met en évidence leurs propriétés analytiques les plus importantes.

Il existe des cas où l'équation admet des intégrales particulières de la forme que j'ai appelée *la forme d'Euler*, s'exprimant linéairement à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable caractéristique et des dérivées de cette fonction en nombre déterminé. La méthode des intégrales principales, en mettant ce fait en évidence, permet en outre de reconnaître, par un nombre limité d'opérations, si ces intégrales particulières existent, et conduit directement à leur détermination effective.

On obtient des indications intéressantes sur la forme des singularités accidentelles lorsque la solution est donnée complètement par des intégrales principales; on reconnaît ainsi, par exemple, que dans le voisinage d'une caractéristique singulière accidentelle, l'intégrale ne peut pas, en général, être uniforme.

Comme dans le cas des équations du second ordre à caractéristiques distinctes, la connaissance d'une seule intégrale particulière dépendant d'un paramètre permettra d'obtenir, dans certains cas, soit l'intégrale générale de l'équation, soit une autre intégrale dépendant d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires.

Tels sont les principaux résultats que j'ai établis dans ce travail.

La bienveillance avec laquelle on a accueilli mon Mémoire sur les équations du second ordre m'engage à publier encore cette étude, malgré les nombreuses lacunes qu'elle présente.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soit $D(z) = 0$ une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre n, à deux variables indépendantes, x et y

$$(1) \qquad D(z) = \Sigma A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} \qquad i + k \leqq n.$$

Désignons par $\Delta(z)$ l'ensemble des termes qui contiennent les dérivées partielles d'ordre n

$$(2)\qquad \Delta(z) = A_{n,0}\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_{n-1,1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + A_{0,n}\frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

et par $D_1(z)$ l'ensemble des termes qui ne contiennent pas ces dérivées.

L'équation

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{n,0}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^n + A_{n-1,1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &\qquad + A_{n-2,2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{n-2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \ldots + A_{0,n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^n = 0 \end{aligned}\right.$$

admet n intégrales distinctes ou non

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \ldots,\quad \varphi_n.$$

On sait que les courbes $\varphi_i =$ const. s'appellent les *caractéristiques* de l'équation (1).

En posant $\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -u$ on a, pour déterminer u, l'équation

$$A_{n,0}u^n - A_{n-1,1}u^{n-1} + A_{n-2,2}u^{n-2} + \ldots + (-1)^n A_{0,n} = 0.$$

Soit u_i la racine qui correspond à la fonction φ_i; si u_i est une racine multiple d'ordre p (les variables x et y étant supposées quelconques), nous dirons que φ_i est une variable caractéristique d'ordre p, et les courbes $\varphi_i =$ const. seront des caractéristiques d'ordre p.

2. D'après le théorème fondamental de Cauchy on sait qu'une intégrale analytique de l'équation (1) se trouve déterminée, dans un certain domaine, lorsqu'on donne, sur une courbe analytique quelconque (C), les valeurs de l'intégrale et de ses $n-1$ premières *dérivées extérieures*. Cette expression de *dérivée extérieure* m'a paru commode pour exprimer le fait suivant. Supposons qu'on exprime les coordonnées des points du plan à l'aide de deux paramètres α et β,

et que la courbe analytique (C) soit représentée par $\beta = \beta_0$. Les valeurs des données initiales sur cette courbe sont des fonctions de α. Or il est évident que la connaissance de z sur (C) entraîne celle de toutes ses dérivées, prises par rapport à la seule variable α, dérivées relatives à des déplacements effectués sur la courbe; mais les dérivées $\frac{\partial z}{\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$, ..., relatives à des déplacements extérieurs, restent entièrement inconnues; ce sont ces dérivées que j'appelle *extérieures*.

Quand on connaît les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures, toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, se trouvent déterminées en tout point de la courbe (C). L'équation considérée, jointe aux conditions initiales, permet de calculer les autres.

Posons $z_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$, et considérons un déplacement (dx, dy) effectué sur (C); nous avons

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} dz_{n-1,0} = z_{n,0}\,dx + z_{n-1,1}\,dy, \\ dz_{n-2,1} = \ldots\ldots + z_{n-1,1}\,dx + z_{n-2,2}\,dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dz_{0,n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + z_{1,n-1}\,dx + z_{0,n}\,dy. \end{array}\right.$$

$$(5)\qquad A_{n,0} z_{n,0} + A_{n-1,1} z_{n-1,1} + \ldots + A_{0,n} z_{0,n} + D_1(z) = 0.$$

Le déterminant des inconnues $z_{n,0}$, $z_{n-1,1}$, ..., $z_{0,n}$ est

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & dx & dy & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & dx & dy \\ A_{n,0} & A_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & A_{1,n-1} & A_{0,n} \end{vmatrix}.$$

C'est le résultat obtenu en éliminant $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ entre les deux équa-

tions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

$$\Sigma A_{ik} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^k = 0, \qquad i + k = n.$$

Donc Δ s'annule seulement aux points où la courbe (C) touche une caractéristique, à moins que les coefficients $A_{ik} (i + k = n)$ ne s'annulent simultanément. Les points où cette dernière circonstance se présente sont des points singuliers que l'on peut provisoirement écarter. Nous sommes donc conduits, par la simple discussion des équations (3), à la considération des caractéristiques dont le rôle est si important dans la théorie des équations linéaires.

Lorsqu'on a $\Delta \neq 0$ le système (3) est déterminé. Il existe, pour les dérivées d'ordre n, un seul système de valeurs au point considéré de la courbe (C); les dérivées d'ordre supérieur à n sont déterminées dans les mêmes conditions; en effet, il est facile de voir que le déterminant du système d'équations linéaires auquel on est conduit pour calculer les dérivées d'ordre $n + p$ est égal à la puissance $(p + 1)^{\text{ième}}$ de Δ. On peut d'ailleurs calculer toutes les dérivées d'ordre supérieur par groupes de $n + 1$ au moyen d'équations linéaires dont le déterminant est toujours Δ; tel serait, par exemple, le groupe des dérivées d'ordre n de z_{ij}

$$\frac{\partial^n z_{ij}}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z_{ij}}{\partial x^{n-1} \partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z_{ij}}{\partial y^n}.$$

Les valeurs ainsi calculées pour les dérivées des différents ordres conduisent à un développement convergent, d'après le théorème de Cauchy. On aperçoit donc cette propriété que, dans le voisinage de tout point de la courbe analytique (C), l'intégrale existera et sera holomorphe, sauf aux points qui satisfont à l'une des conditions suivantes :

1° La courbe (C) y est tangente à une caractéristique;

2° Les coefficients de toutes les dérivées d'ordre supérieur s'y annulent;

3° Les fonctions initiales ou les coefficients de l'équation n'y sont pas holomorphes.

5. Lorsque Δ s'annule, les équations (4) deviennent incompatibles, à moins qu'il n'existe entre les données initiales une certaine relation. Supposons, par exemple, $dy \neq 0$, et prenons comme déterminant principal celui qu'on obtient en supprimant dans Δ la première colonne et la dernière ligne; ce mineur est égal à dy^n. Le déterminant caractéristique correspondant est

$$\begin{vmatrix} dz_{n-1,0} & dy & 0 & \dots & \dots & 0 \\ dz_{n-2,1} & dx & dy & \dots & \dots & 0 \\ dz_{n-3,2} & 0 & dx & dy & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ dz_{0,n-1} & 0 & \dots & 0 & dx & dy \\ -D_1(z) & A_{n-1,1} & A_{n-2,2} & \dots & \dots & A_n \end{vmatrix} = \delta.$$

En l'égalant à zéro, on exprime simplement que les données doivent satisfaire à l'équation considérée.

Dans le cas de l'incompatibilité, l'intégrale n'étant plus, en général, développable, admet pour points singuliers les points où Δ s'annule, par exemple les points de contact de (C) avec une caractéristique. Lorsque la courbe (C) est elle-même une caractéristique, les n fonctions initiales ne peuvent plus être choisies arbitrairement, car elles doivent satisfaire à la condition $\delta = 0$; mais, dans ce cas, les équations forment un système indéterminé et l'intégrale ne se trouve pas complètement définie.

Nous étudierons ce cas plus loin.

4. Les calculs précédents peuvent s'étendre sans grandes modifications aux équations non linéaires à deux variables indépendantes.

Considérons une équation d'ordre n

$$(6) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{dx^{n-1}dy}, \dots\right) = 0.$$

Posons

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = p_{\alpha,\beta}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha,\beta}} = \mathrm{P}_{\alpha,\beta}, \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x} + p_{1,0}\dfrac{\partial}{\partial z} + \sum p_{i+1,k}\dfrac{\partial}{\partial p_{i,k}} \\ \left(\dfrac{d}{dy}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y} + p_{0,1}\dfrac{\partial}{\partial z} + \sum p_{i,k+1}\dfrac{\partial}{\partial p_{i,k}} \end{array}\right\} i+k \leq n-1.$$

Lorsqu'on donne sur une courbe (C) les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures, toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement se trouvent déterminées; pour calculer les dérivées d'ordre n, il faut joindre à l'équation (6) le système des n équations (4). Si le déterminant fonctionnel du système ainsi formé par rapport aux dérivées inconnues n'est pas identiquement nul, il y aura au moins un système de solutions. Ce déterminant fonctionnel est

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & dx & dy & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & dx & dy \\ \mathrm{P}_{n,0} & \mathrm{P}_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \mathrm{P}_{1,n-1} & \mathrm{P}_{0,n} \end{vmatrix}$$
$$= \mathrm{P}_{0,n}dx^n - \mathrm{P}_{1,n-1}dx^{n-1}dy + \mathrm{P}_{2,n-2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots + (-1)^n \mathrm{P}_{n,0}dy^n.$$

Il s'annule quand $\dfrac{dy}{dx} = m$ est racine de *l'équation caractéristique*

$$(8)\qquad \mathrm{P}_{n,0}m^n - \mathrm{P}_{n,1}m^{n-1} + \mathrm{P}_{n,2}m^{n-2} + \ldots + (-1)^n \mathrm{P}_{n,0} = 0.$$

5. Cherchons maintenant à calculer les dérivées d'ordre supérieur à n.

Nous avons, pour un déplacement effectué sur la courbe (C),

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} dp_{n,0} = p_{n+1,0}dx + p_{n,1}dx, \\ dp_{n-1,1} = \ldots\ldots\ldots + p_{n,1}dx + p_{n-1,2}dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dp_{1,n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p_{2,n}dx + p_{1,n}dy. \end{array}\right.$$

et

$$(A)\quad \begin{cases} dp_{n-1,1} = p_{n,1}\,dx + p_{n-1,2}\,dy, \\ dp_{n-2,2} = \ldots\ldots + p_{n-1,2}\,dx + p_{n-2,3}\,dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dp_{0,n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p_{1,n}\,dx + p_{0,n+1}\,dy. \end{cases}$$

Le système (A) contient toutes les dérivées de $\frac{dz}{dx}$ et le système (A') contient les dérivées de $\frac{dz}{dy}$.

D'autre part, la différentiation de l'équation (6) donne

$$(B)\qquad \left(\frac{df}{dx}\right) + \sum P_{i,n-i}\,p_{i+1,n-i} = 0,$$

$$(B')\qquad \left(\frac{df}{dy}\right) + \sum P_{n-k,k}\,p_{n-k,k+1} = 0.$$

Les deux systèmes [(A), (B)] et [(A'), (B')] sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre $n+1$ et admettent tous les deux pour déterminant le déterminant fonctionnel Δ. Si le système de valeurs calculées pour les dérivées d'ordre n n'annule pas le déterminant fonctionnel, les dérivées d'ordre $n+1$ seront donc entièrement déterminées, et il en sera de même des dérivées d'ordre supérieur qui se calculeront de la même manière, par groupes de $n+1$, ainsi qu'il a été déjà indiqué pour les équations linéaires; le déterminant de chacun des systèmes considérés sera toujours Δ. On se trouve dans le cas général où le théorème de Cauchy est applicable.

Lorsque le déterminant Δ est constamment nul sur la courbe (C) avec les valeurs données des fonctions initiales, cette courbe (C) est une caractéristique. L'indétermination qui se présente alors dans le calcul des dérivées d'ordre supérieur peut s'étendre même aux dérivées d'ordre n. Cependant, le cas le plus ordinaire est celui où l'indétermination commence aux dérivées d'ordre $n+1$. Pour que les systèmes [(A), (B)] et [(A'), (B')] soient compatibles, il faut, dans le cas où l'on a $\Delta = 0$, que tous les déterminants d'ordre $n+1$ de la

matrice suivante soient nuls

$$(9)\quad \begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & dp_{n,0} & dp_{n-1,1} \\ 0 & dx & dy & \dots & \dots & \dots & 0 & dp_{n-1,1} & dp_{n-2,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & dx & dy & dp_{1,n-1} & dp_{0,n} \\ P_{n,0} & P_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & P_{1,n-1} & P_{0,n} & -\left(\frac{df}{dx}\right) & -\left(\frac{df}{dy}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi deux relations entre les différentielles $dp_{i,n-i}$. On peut donner à cette condition une forme qui la rapproche du système des équations différentielles des caractéristiques des équations du premier ordre. Il existe une même relation linéaire entre les éléments des différentes colonnes de la matrice (9); on peut donc écrire, en introduisant des indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$,

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{P_{n,0}} &= \frac{dy + \lambda_1 dx}{P_{n-1,1}} = \frac{\lambda_1 dy + \lambda_2 dx}{P_{n-2,2}} = \dots = \frac{\lambda_{n-1} dy}{P_{0,n}} \\ &= \frac{dp_{n,0} + \lambda_1 dp_{n-1,1} + \lambda_2 dp_{n-2,2} + \dots + \lambda_{n-1} dp_{1,n-1}}{-\left(\frac{df}{dx}\right)} \\ &= \frac{dp_{n-1,1} + \lambda_1 dp_{n-2,2} + \dots + \lambda_{n-1} dp_{0,n}}{-\left(\frac{df}{dy}\right)}. \end{aligned} \right.$$

On pourrait joindre au système (10) les équations qui se déduiraient des identités

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} dz &= p_{1,0}\, dx + p_{0,1}\, dy, \\ dp_{\alpha,\beta} &= p_{\alpha+1,\beta}\, dx + p_{\alpha,\beta+1}\, dy. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sont susceptibles d'une expression simple : $\frac{dy}{dx} = m$ est une racine de l'équation caractéristique (8), et l'on déduit du système (10)

$$\lambda_1 = \frac{P_{n-1,1}}{P_{n,0}} - m, \qquad \lambda_2 = \frac{P_{n-2,2}}{P_{n,0}} - m\lambda_1, \qquad \dots\dots$$

On voit donc que λ_1 est la somme des racines de l'équation (8) autres que m, λ_2 la somme de leurs produits deux à deux, etc., de sorte que le polynome

$$P_{n,0}[t^{n-1} - \lambda_1 t^{n-2} + \lambda_2 t^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}\lambda_{n-1}]$$

est le quotient par $t - m$ du polynome caractéristique

$$P_{n,0}t^n - P_{n-1,1}t^{n-1} + P_{n-2,2}t^{n-2} - \ldots + (-1)^n P_{0,n}.$$

Dans le cas des équations du second ordre, les équations de la forme (10) sont applicables; il s'y introduit un seul paramètre λ qui est égal à la seconde racine de l'équation caractéristique, la première étant égale à $\frac{dy}{dx}$.

Pour les équations du premier ordre, les équations (10) sont dégagées de tout paramètre λ et l'on retrouve la forme bien connue des équations différentielles des caractéristiques.

Le système (10) contient en général moins d'équations que d'inconnues, même en y adjoignant les identités (11). Cependant elles pourront dans certains cas admettre des combinaisons intégrables.

6. *Intégration par approximations successives.* — Revenons maintenant aux équations linéaires. L'élégante et féconde méthode d'approximations successives, que M. Picard a développée dans de nombreux Mémoires, nous fournira des indications précieuses sur le domaine d'existence des intégrales. Le principe de cette méthode a été indiqué par Cauchy, en 1840, dans une Note des *Comptes rendus* (¹). Il consiste en ceci :

Soit $D(z) = 0$ une équation linéaire que l'on décompose ainsi

$$(A) \qquad \Delta(z) = \Delta_1(z),$$

de telle façon que l'on sache intégrer l'équation $\Delta(z) = 0$. On pourra

(¹) CAUCHY, *Œuvres*, 1re série, t. V (*Comptes rendus*, 5 juillet 1840).

également intégrer dans cette hypothèse l'équation avec second membre

$$\Delta(z) = f(x, y),$$

quelle que soit la fonction $f(x, y)$ [1].

Cela posé, cherchons à déterminer une intégrale de l'équation (A) satisfaisant à des conditions initiales données. Nous commençons par intégrer avec ces fonctions initiales l'équation

$$\Delta(u_0) = 0.$$

Puis nous considérons successivement les équations

$$\begin{aligned}
&\Delta(u_1) = \Delta_1(u_0),\\
&\Delta(u_2) = \Delta_1(u_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta(u_n) = \Delta_1(u_{n-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

que nous intégrons avec des valeurs initiales égales à zéro. Si la série

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

est convergente, elle représente une intégrale de l'équation considérée, admettant les valeurs initiales données.

Pour les équations linéaires à deux variables indépendantes, M. Delassus indique la décomposition suivante [2]. Supposons $A_{n,0} = 1$ et désignons par $a_1, a_2, \dots, a_n$ les racines distinctes ou non de l'équation caractéristique; on pourra prendre

$$\Delta(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_n \frac{\partial}{\partial y}\right) z;$$

dans ce cas l'expression de

$$-\Delta_1(z) = D(z) - \Delta(z)$$

---

(1) Cauchy, *loc. cit.*

(2) *Annales de l'École Normale*, 1895. *Supplément.*

en contiendra plus de dérivées d'ordre n. L'équation $\Delta(z) = 0$ est équivalente au système

$$(B)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} - a_n \dfrac{\partial z}{\partial y} = \theta_{n-1}, \\ \dfrac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x} - a_{n-1} \dfrac{\partial \theta_{n-1}}{\partial y} = \theta_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x} - a_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0, \end{array}\right.$$

qui ne contient que des équations du premier ordre. La résolution de ce système se ramène donc à celle d'une série d'équations de la forme

$$(C)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = b.$$

7. Avant d'aller plus loin, précisons les termes que nous avons à employer. Une *courbe analytique* est formée par l'ensemble des points dont l'une des coordonnées est une fonction analytique de l'autre (ou les deux coordonnées fonctions analytiques d'un même paramètre). La variable indépendante devant prendre des valeurs réelles ou imaginaires, nous prendrons pour *image* de la *courbe* une surface de Riemann, algébrique ou transcendante. J'appelle *ligne* ou *chemin* tracé sur cette courbe un système continu de points dont l'image est à une seule dimension. Une *portion de courbe* aura pour image une portion de la surface de Riemann limitée par un contour; nous n'excluons pas, d'ailleurs, le cas où ce contour pourrait avoir des points à l'infini.

8. Occupons-nous maintenant de l'équation (C). Le problème de l'intégration peut être défini ainsi :

Déterminer la valeur que doit prendre en un point arbitraire $M(x_0, y_0)$ du plan analytique l'intégrale de l'équation (C) qui prend des valeurs données sur une courbe analytique (Σ). Or la caractéristique qui passe au point M est une courbe analytique qui rencontre (Σ) en un point P et l'on a

$$u_M = u_P + \int_P^M b\,dx,$$

l'intégrale étant prise suivant un chemin quelconque tracé sur la caractéristique considérée et allant de P en M. La fonction u_M, ainsi définie, est, en général, multiforme, car le point d'intersection P n'est pas nécessairement unique, et, de plus, le choix du chemin d'intégration PM peut n'être pas indifférent pour la valeur du second terme.

Cela posé, considérons le système (B) et supposons qu'on connaisse les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures sur la droite $x = x_0$. On déduit de ces valeurs initiales celles des fonctions θ, ce qui permet de résoudre le système.

9. Ayant calculé, comme nous l'avons indiqué, le premier terme u_0 de la suite, il reste à étudier le système

$$\Delta(u_k) = \Delta_1(u_{k-1}),$$

chaque nouveau terme u_k étant maintenant calculé avec des valeurs initiales égales à zéro. Nous supposerons dans ce qui suit que les fonctions initiales aient été données en fonction de y pour $x = x_0$, de sorte que la courbe analytique (Σ) se réduit à la droite $x = x_0$.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les systèmes de caractéristiques définis par les équations

$$\frac{dy}{dx} + a_1 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} + a_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy}{dx} + a_n = 0.$$

Représentons par

$$\int_{x_0(C_i)}^{x} f(x, y)\, dx$$

l'intégrale de la fonction $f(x, y)$ prise suivant un chemin tracé sur une caractéristique C_i et allant d'un point d'abscisse x_0 à un point d'abscisse x, le chemin d'intégration ne passant par aucun point où la tangente soit parallèle à Oy $(x = \text{const.})$.

Nous aurons

$$(12) \qquad u_k = \int_{x_0(C_n)}^{x} dx \int_{x_0(C_{n-1})}^{x} dx \ldots \int_{x_0(C_2)}^{x} dx \int_{x_0(C_1)}^{x} \Delta_1(u_{k-1})\, dx.$$

Pour étudier les propriétés des fonctions u_i, nous allons faire quelques hypothèses sur le domaine dans lequel varient x et y. Nous supposerons donc les conditions suivantes vérifiées : 1° dans ce domaine E les coefficients de l'équation sont holomorphes et les coefficients des dérivées d'ordre n ne s'y annulent pas simultanément; 2° les fonctions y de x définies par les équations des caractéristiques sont holomorphes dans tout le domaine, de sorte que la fonction y qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ n'admet qu'une seule valeur pour toute valeur de x; 3° chaque caractéristique qui passe en un point M de ce domaine rencontrant la droite $x = x_0$ en un point déterminé P, il est possible de joindre PM par un chemin tracé sur la caractéristique et situé tout entier dans le domaine considéré. Ce qui précède exclut du domaine tous les points de contact des caractéristiques avec des tangentes parallèles à Oy. Nous allons restreindre encore l'étendue de ce domaine.

Supposons que, pour $x = x_0$, les fonctions initiales soient holomorphes à l'intérieur d'un contour (A) du plan (y). L'ensemble des caractéristiques de chaque système se partage en deux catégories : celles qui rencontrent la droite analytique $x = x_0$ en un point dont l'ordonnée est figurée à l'intérieur de l'aire (A) et celles qui ne satisfont pas à cette condition. Les caractéristiques de tout point $M(x_1, y_1)$ de E devront satisfaire à la première catégorie; de plus, à tout chemin décrit par la variable x dans son plan et allant de x_1 en x_0 correspond un chemin tracé sur chaque caractéristique du point M; les points de ces divers chemins devront encore satisfaire à la condition que nous venons d'indiquer pour le point M.

Soit $P_i(x_0, y_0)$ le point d'intersection de la caractéristique (C_i) du point M avec la droite $x = x_0$. L'ordonnée y_0 du point P est une fonction holomorphe des coordonnées M et de même y_1 est une fonction holomorphe de x_1, x_0 et y_0. Donc les caractéristiques (C_i) de la première catégorie rencontreront la droite $x = x_1$ en des points dont les ordonnées seront figurées sur le plan y dans une aire (A_i) se déduisant de (A) par une déformation continue. Les caractéristiques des systèmes (C_2), (C_3), ... déterminent de même des aires (A_2), (A_3), ... Les aires (A_1), (A_2), (A_3), ... qui correspondent à une même abscisse ont une portion commune (Σ) dont le contour se déduit lui-même de celui de (A) par une déformation continue. On peut se faire une idée

du domaine (E) précédemment défini en considérant l'ensemble (E′) des points obtenus en associant à chaque valeur de x le système des valeurs de y représentées à l'intérieur de l'aire Σ correspondante. Toutefois cet ensemble E′ peut être plus étendu que E : nous supprimons, bien entendu, du domaine ainsi défini toute la partie qui ne satisferait pas aux premières conditions.

10. Les fonctions u_i sont définies à l'intérieur du domaine E. Il est facile de démontrer qu'elles y sont, en général, holomorphes.

Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions holomorphes qui restent constantes sur les caractéristiques des systèmes respectifs $C_1, C_2, \ldots, C_n$. On peut prendre, par exemple, pour la fonction φ_i l'ordonnée $y_{i,0}$ du point où la caractéristique C_i rencontre la droite x_0. Chaque caractéristique (C_i) est représentée par l'équation $\varphi_i(x, y) = \text{const}$.

Considérons d'abord l'intégrale

$$u = \int_{x_0(C_i)}^{x} A f(x, y)\, dx,$$

où A désigne une fonction holomorphe connue et $f(x, y)$ une fonction arbitraire supposée holomorphe. Pour calculer cette intégrale, il faut remplacer y par sa valeur en fonction *uniforme* de x et de φ_i et intégrer ensuite, en regardant φ_i comme une constante; le chemin d'intégration relatif à x peut être, d'ailleurs, une ligne quelconque, pourvu que le chemin correspondant tracé sur la caractéristique C_0 soit intérieur au domaine (E). La déformation de ce chemin n'altère pas la valeur de l'intégrale.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A f(x, y) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \int_{x_0}^{x} \frac{(A'_y f + A f'_y)}{\varphi'_{i,y}}\, dx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \int_{x_0}^{x} \frac{\frac{\partial}{\partial y}(A f)}{\varphi'_{i,y}}\, dx.$$

Tant que φ_i est holomorphe et $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ différent de zéro, conditions qui

sont vérifiées à l'intérieur du domaine E, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ existent donc et la fonction u est elle-même holomorphe.

Les fonctions φ_i cessent en général d'être holomorphes aux points où deux racines ordinairement distinctes de l'équation caractéristique deviennent égales entre elles. Le lieu de ces points est une courbe que nous pouvons appeler la *courbe discriminante* de l'équation. Nous devons la supposer tout entière extérieure au domaine (E).

Ces résultats s'appliquent immédiatement aux expressions qui contiennent plusieurs signes d'intégration, soit

$$v = \int_{x_0(C_1)}^{x} A_1 dx \int_{x_0(C_2)}^{x} A_2 dx \ldots \int_{x_0(C_n)}^{x} A_n f(x, y)\, dx.$$

Les dérivées de cette fonction sont des sommes de termes de la même forme dans lesquels le dernier signe d'intégration à droite porte sur une expression linéaire de la fonction arbitraire f et de ses dérivées par rapport à y. Les termes qui figurent dans l'expression d'une dérivée quelconque d'ordre $p (p < n)$ contiennent au moins $n - p$ signes d'intégration.

II. Nous allons maintenant étudier la convergence de la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Considérons l'expression de v. Soit S la longueur du chemin d'intégration décrit par la variable x dans son plan pour aller de x_0 en x. Nous supposerons que ce chemin soit le même pour toutes les quadratures effectuées. On pourra d'ailleurs supposer en général qu'il se réduit à la droite $\overline{x_0 x}$, ce qui donne

$$S = |x - x_0|.$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, M$ les modules maxima de $A_1, A_2, \ldots, A_n, f(x, y)$ dans le domaine considéré ; nous aurons

$$|v| \leq \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n M S^n.$$

12. On a donc une limite du module de v. Pour avoir de même une limite supérieure du module de chacune des dérivées, nous devons faire d'abord quelques remarques sur le calcul de v. Supposons que dans toutes les intégrations effectuées la variable x décrive le chemin rectiligne $\overline{x_0 x}$. La caractéristique (C_1) rencontre la droite $x = x_0$ en un point d'ordonnée y_0, et lorsque la variable x décrit le chemin rectiligne $\overline{x_0 x}$, le point analytique (x, y) décrit sur (C_1) un chemin déterminé L_1; c'est ce chemin que parcourt le point (x, y) dans le calcul de la dernière intégrale (la première à gauche); mais cela suppose qu'on connaît le résultat des $n-1$ premières intégrations en tout point de L. Or, pour avoir la $(n-1)^{\text{ième}}$ intégrale en un point (ξ, η), on doit faire parcourir au point (x, y) un chemin L_2 tracé sur la caractéristique (C_2) du point (ξ, η); on aura donc à considérer l'ensemble des chemins L_2 qui passent par les différents points de L_1 et ainsi de suite. J'appelle E_{xy} l'ensemble des points engendré par les divers chemins d'intégration qu'on aura dû considérer pour le calcul de la valeur de v au point xy. Ceux des points de cet ensemble dont l'abscisse est égale à un nombre donné ξ forment un ensemble partiel compris dans le domaine E et dont les ordonnées sont par conséquent figurées à l'intérieur du contour C_ξ qui limite dans le plan y les ordonnées des points de E dont l'abscisse est égal à ξ. Soit δ_ξ la distance minima des ordonnées de cet ensemble au contour C_ξ. Lorsque ξ varie de x_0 à x, suivant le chemin rectiligne $\overline{x_0 x}$, δ_ξ passe par un minimum δ que j'appellerai la distance de l'ensemble E_{xy} à la frontière du domaine E. Cela posé, si l'on donne un nombre positif ρ assez petit, il existera des points (x, y) tels que pour chacun d'eux la distance de l'ensemble E_{xy} à la frontière du domaine E sera supérieure à ρ. Je désigne leur ensemble par E_ρ. Soit (x, y_1) l'un d'entre eux; on pourra déterminer un nombre ε tel que tous les points $(x_1 y)$ satisfaisant aux inégalités

$$|x - x_1| < \varepsilon, \qquad |y - y_1| < \varepsilon$$

appartiendront encore à l'ensemble E_ρ. Tous les points d'abscisse x_0, dont l'ordonnée est figurée à une distance supérieure à ρ du contour de l'aire A, appartiennent à cet ensemble.

A une suite de valeurs décroissantes attribuées au nombre ρ

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_p, \quad \ldots$$

correspondent des domaines

$$E_{\rho_1}, \quad E_{\rho_2}, \quad \ldots, \quad E_{\rho_p}, \quad \ldots,$$

dont chacun englobe le précédent.

13. La fonction $f(x, y)$ étant holomorphe à l'intérieur du domaine E et ayant pour maximum M, considérons un point (x_1, y_1) du domaine tel que l'affixe de y_1 soit située à une distance égale ou supérieure à ρ du contour de l'aire correspondante Σ; nous avons

$$\left|\frac{\partial^k f(x_1, y_1)}{\partial y_1^k}\right| < \frac{k!\,M}{\rho^n}.$$

Le calcul du n° **11**, relatif au module maximum de v, pourra donc se répéter pour les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement et même pour les combinaisons linéaires de ces dérivées, à l'intérieur du domaine E_ρ. Toute fonction linéaire de v et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, admettra pour la limite supérieure de son module une expression de la forme

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) MS,$$

$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)$ étant un polynome en S et $\frac{1}{\rho}$ $\left(\text{ou même en S et } \frac{S}{\rho}\right)$ à coefficients positifs, indépendants de la fonction $f(x, y)$ considérée.

14. Nous pouvons maintenant reprendre l'étude de la convergence de la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

Désignons par $\mathfrak{M}_n$ la limite supérieure du module de u_n dans le domaine E_ρ. L'égalité

$$u_{n+1} = \int_{x_0 \, C_n}^{x} \int_{x_0 \, C_{n-1}}^{x} \cdots \int_{x_0 \, C_1}^{x} \Delta(u_n)\, dx$$

donne, pour la limite supérieure du module de u_{n+1},

$$\mathfrak{M}_{n+1} = \varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)\mathfrak{M}_n S,$$

et, par suite,

$$\mathfrak{M}_n = \overline{\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)}^{\,n} S^n \mathfrak{M}_0.$$

Quel que soit ρ, on peut prendre S assez petit pour que l'on ait

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) S < 1.$$

Dans ces conditions, la série sera convergente.

Si l'on remplace ρ par un nombre plus petit ρ_1, il faudra également remplacer S par un nombre plus petit S_1, mais il ne sera évidemment nécessaire de diminuer la longueur du chemin d'intégration que pour les points de l'ensemble E_{ρ_1}, qui ne sont pas compris dans l'ensemble E_ρ. Cette remarque faite, nous pouvons faire tendre ρ vers zéro.

Soit R le domaine défini par les propriétés précédentes, tout point xy de ce domaine satisfait à la condition suivante : l'ensemble E_{xy} étant intérieur au domaine E, si l'on désigne par ρ sa distance à la frontière de ce domaine et par S la distance $\overline{xx_0}$, on a

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) S < 1.$$

Soit (x_1, y_1) un point du domaine (R), on pourra déterminer un nombre ε tel que tous les points satisfaisant aux conditions

$$|x - x_1| < \varepsilon, \qquad |y - y_1| < \varepsilon$$

appartiendront encore à ce domaine. Tout point du chemin L_1 que décrit le point (x, y) sur la caractéristique C_1 quand x décrit le chemin rectiligne $\overline{xx_0}$ fait partie du domaine R. Ce domaine englobe entièrement la portion A de la droite analytique $x = x_0$; il est, de plus,

indépendant des fonctions initiales. Nous avons donc ce théorème, extension de celui de M. Delassus.

THÉORÈME. — *A toute portion* (A) *de la droite analytique* $x = x_0$, *n'admettant aucune tangente caractéristique et située tout entière dans une région où les coefficients de l'équation sont holomorphes, on peut faire correspondre une région* (R) *telle que toute intégrale définie par des fonctions initiales holomorphes sur* (A) *soit aussi holomorphe dans le domaine entier* R.

On pourrait évidemment remplacer la droite analytique $x = x_0$ par une courbe analytique quelconque; l'aire (A) correspond alors à une *portion* de cette courbe qui ne devra contenir ni points singuliers, ni points à tangentes caractéristiques. Nous donnerons au domaine R correspondant le nom de *domaine régulier* de la portion de courbe considérée.

DEUXIÈME PARTIE.

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES PAR DES FONCTIONS INITIALES SUR LES CARACTÉRISTIQUES. — INTÉGRALES PRINCIPALES.

15. La détermination des intégrales par leurs fonctions initiales sur une courbe non caractéristique nous a donné des indications sur le domaine d'existence de ces fonctions. Nous allons maintenant étudier les intégrales sur les caractéristiques, ce qui nous fera connaître d'une façon plus précise leur forme analytique et leur manière d'être.

Supposons que x soit une variable caractéristique d'ordre p et cherchons à déterminer l'intégrale en nous donnant sur la droite $x = x_0$ ses valeurs et celles d'un certain nombre de ses dérivées. La méthode d'approximations successives de Cauchy et de M. Picard s'applique encore à ce problème et nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *On peut déterminer une intégrale z d'une équation linéaire en donnant :* 1° *sur une caractéristique multiple d'ordre p les valeurs de z et de ses $n - p - 1$ premières dérivées extérieures;* 2° *sur une seconde courbe coupant la caractéristique en un point*

non singulier les valeurs de z et de ses $p-1$ premières dérivées extérieures.

L'équation pourra s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{np} \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^p z}{\partial y^p} = \Delta_1(z),$$

$\Delta_1(z)$ ne contenant plus que des dérivées d'ordre inférieur à n. Nous désignerons encore par $\Delta(z)$ le premier membre de l'équation précédente. Considérons d'abord l'équation

$$(1) \qquad \Delta(z) = 0.$$

Posons $\frac{\partial^p z}{\partial y^p} = u$, et intégrons l'équation

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} - a_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{n-p} \frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0.$$

La connaissance de z et de ses $n-p-1$ premières dérivées extérieures

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-p-1} z}{\partial x^{n-p-1}},$$

pour $x = x_0$ en fonction de y, détermine aussi u et ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x. On peut donc calculer u, et la solution de l'équation (1) est alors représentée par l'expression

$$\int_{y_0}^{y} \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(x,t)\,dt$$
$$+ \varphi_0(x) + \frac{y-y_0}{1}\varphi_1(x) + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\varphi_2(x) + \frac{(y-y_0)^{p-1}}{(p-1)}\varphi_{p-1}(x),$$

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{p-1}(x)$ désignant les valeurs de z et de ses $n-1$ premières dérivées par rapport à y pour $y = y_0$. Ces p nouvelles fonctions sont également arbitraires.

Intégrons maintenant l'équation

$$(3) \qquad \Delta(z) = f(x,y),$$

$f(x, y)$ désignant une fonction holomorphe quelconque, de telle façon que l'on ait

$$z = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{n-p-1} z}{\partial x^{p-1}} = 0,$$

pour $x = x_0$, et

$$z = \frac{\partial z}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}} = 0,$$

pour $y = y_0$.

Nous avons

$$z = \int_{y_0}^{y} dy \int_{y_0}^{y} dy \ldots \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0 C_{n-p-1}}^{x} dx \int_{x_0 C_{n-p-1}}^{x} dx \ldots \int_{x_0 C_1}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Cette expression contient p signes d'intégrations relatifs à la variable y, les intégrations correspondantes devant être faites en supposant $x = \text{const}$. Les $n - p$ intégrations relatives à x sont de la même nature que celles que nous avons déjà considérées dans la première Partie, et sont effectuées suivant les caractéristiques (C_1), (C_2), ..., (C_{n-p}).

16. Ces préliminaires établis, nous pouvons maintenant appliquer la méthode d'approximations successives, comme dans le premier cas.

Soit u_0 l'intégrale particulière de l'équation (1) déterminée par les conditions suivantes; on donne :

1° Les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^{n-p-1} z}{\partial x^{n-p-1}}$ en fonction de x pour $x = x_0$;

2° Celles de z, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$, en fonction de x pour $y = y_0$.

Désignons ensuite par u_1, u_2, ..., u_n, les intégrales des équations successives

$$\Delta(u_k) = \Delta_1(u_{k-1})$$

qui correspondent à des valeurs nulles des fonctions initiales. La série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots$$

admet un domaine de convergence dans le voisinage du point $x_0 y_0$.

En effet, les remarques que nous avons faites, relativement aux expressions de la forme v, sont encore applicables lorsque les intégrations sont effectuées en prenant comme variables d'intégration succes-

sivement x et y. Les dérivées de ces expressions sont des sommes de termes de la même forme dans lesquels le dernier signe d'intégration à droite porte sur une combinaison linéaire de la fonction arbitraire $f(x, y)$ et de ses dérivées par rapport à x et à y. Chacun des termes qui figure dans l'expression d'une dérivée d'ordre p contient au moins $n-p$ signes d'intégration.

Supposons donc que, dans un domaine E ne contenant aucun point singulier des coefficients de l'équation, ni aucun point de la courbe discriminante, les fonctions initiales soient développables suivant les puissantes croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$, avec des rayons de convergence égaux ou supérieurs à un nombre ρ. Chacune des fonctions u_i déduite de u_0, sera développable dans ces conditions autour du point $x_0 y_0$ et admettra le même rayon de convergence, pourvu qu'il n'y ait dans le domaine considéré, sur les caractéristiques C_i, aucun point où la tangente soit parallèle à Oy. Cette dernière condition est, d'ailleurs, comprise dans l'hypothèse déjà faite, que la courbe discriminante est extérieure au domaine.

Soient M une limite supérieure du module $f(x, y)$ dans E, S une limite supérieure de la longueur de chacun des chemins d'intégration; le module de la fonction

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} w = &\int_{y_0}^{y} B_1\,dy \int_{y_0}^{y} B_2\,dy \ldots \\ &\int_{y_0}^{y} B_p\,dy \int_{x_0 C_{n-p}}^{x} A_1\,dx \int_{x_0 C_{n-p}}^{x} A_2\,dx \ldots \int_{x_0 C_1}^{x} A_{n-p} f(x, y)\,dx \end{aligned}\right.$$

a pour limite supérieure une expression de la forme

$$PMS^n,$$

P étant indépendant de la fonction arbitraire $f(x, y)$.

Nous trouverons également pour limite supérieure du module de toute dérivée de w, d'ordre égal ou inférieur à $n-1$, ou de toute combinaison linéaire de w et de ces dérivées une expression de la forme

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right) SM.$$

Nous pouvons, par conséquent, répéter le raisonnement du n° **14** sur la convergence de la série. Donc les conditions énoncées définissent une intégrale bien déterminée dans le voisinage du point $x_0 y_0$.

17. Lorsque x est une variable caractéristique d'ordre p, les dérivées d'ordre n de l'équation considérée ne contiennent de différentiation par rapport à x que jusqu'à l'ordre $n-p$; mais parmi les dérivées des ordres inférieurs, $n-1$, $n-2$, ... qui figurent dans l'équation, peuvent se trouver les dérivées $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$, $\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$, ... Supposons qu'on donne, sur une caractéristique d'ordre p, $x = x_0$, les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$. Ces conditions pourraient suffire pour calculer toutes les dérivées d'ordre supérieur à $n-1$, et obtenir, par conséquent, les coefficients du développement de Taylor en un point $x_0 y_0$; or la série qu'on obtient ainsi est, en général, divergente, à moins que les $n-1$ fonctions initiales ne satisfassent à des conditions particulières. En général, sur les caractéristiques multiples d'ordre p, on ne peut donner arbitrairement que les valeurs de z et de ses dérivées extérieures jusqu'à l'ordre $n-p-1$. Ce résultat est bien connu pour l'équation de la propagation de la chaleur,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Sur une droite $x = x_0$, on ne peut, en général, se donner arbitrairement la valeur de z en fonction de y. Pour que la fonction choisie donne naissance à une intégrale analytique, il faut qu'elle soit holomorphe dans tout le plan de la variable y, et cette condition n'est même pas suffisante [1].

Des intégrales principales.

18. Dans l'étude des équations du second ordre, à caractéristiques distinctes, j'ai été conduit à introduire la notion de certaines intégrales

[1] *Voir* une Note de l'auteur sur cette équation dans le *Bulletin des Sciences mathématiques;* 1895.

particulières dépendant d'un paramètre variable et permettant de représenter par des quadratures l'intégrale générale de l'équation. Cette notion s'étend aux équations d'ordre supérieur.

Soit $z(x, y, \alpha)$ une intégrale de l'équation $D(z) = 0$, dépendant du paramètre arbitraire α. Nous dirons que c'est une intégrale principale s'il existe une fonction $\theta(x, y)$, essentiellement distincte d'une constante, telle que l'expression

$$\int_{\theta(x_0, y_0)}^{\theta(x, y)} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

soit encore une solution de l'équation considérée. Par un changement de variable, il est toujours possible de remplacer la fonction θ par la variable indépendante x. Nous allons donc chercher la condition pour que l'intégrale

$$(5) \qquad z = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

satisfasse à l'équation (1), quelle que soit la fonction $f(\alpha)$.

Pour résoudre ce problème, nous mettrons l'équation (1) sous une nouvelle forme symbolique,

$$D = \varphi_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \varphi_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots + \varphi_n z = 0,$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des facteurs différentiels opératoires de la forme

$$\varphi_i = A_{n-i,i} \frac{\partial^i}{\partial y^i} + A_{n-i,i-1} \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} + \ldots + A_{i,0};$$

de sorte que l'on a

$$\varphi_i \frac{\partial^{n-i} z}{\partial x^{n-i}} = A_{n-i,i} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\, \partial y^i} + A_{n-i,i-1} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-i}\, \partial y^{i-1}} + \ldots.$$

Le degré de φ_i par rapport au symbole $\frac{\partial}{\partial y}$ est au plus égal à i.

Désignons par z_x, z'_x, ..., $z_x^{(p)}$ les fonctions suivantes :

$$z_x = z(x, y, \alpha)_{\alpha=x}, \quad z'_x = \left.\frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x}\right|_{\alpha=x}, \quad \ldots, \quad z_x^p = \left.\frac{\partial^p z(x, y, \alpha)}{\partial x^p}\right|_{\alpha=x}.$$

Nous avons, en prenant les dérivées successives jusqu'à l'ordre n par rapport à x de la fonction Z :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
Z &= \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha,\\
\frac{\partial Z}{\partial x} &= f(x)\, z_x + \int_{x_0}^{x} f(\alpha) \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x}\, d\alpha,\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\, z_x\right] + f(x)\, z'_x + \int_{x_0}^{x} f(\alpha) \frac{\partial^2 z(x, y, \alpha)}{\partial x^2}\, d\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial^p Z}{\partial x^p} &= \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left[f(x)\, z_x\right] + \frac{\partial^{p-2}}{\partial x^{p-2}}\left[f(x)\, z'_x\right] + \ldots + \int_{x_0}^{x} f(\alpha) \frac{\partial^p z(x, y, \alpha)}{\partial x^p}\, d\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial^n Z}{\partial x^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[f(x)\, z_n\right] + \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[f(x)\, z'_x\right] + \ldots + \int_{x_0}^{x} f(\alpha) \frac{\partial^n z(x, y, \alpha)}{\partial x^n}\, d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions symboliquement par φ_0, φ_1, ..., φ_n et ajoutons membre à membre pour former $D(z)$. La fonction placée sous le signe d'intégration s'annule identiquement. Dans l'expression restante, il faut égaler à zéro séparément les coefficients de la fonction arbitraire f et de ses différentes dérivées. Le coefficient de $f^{(n-1)}(x)$ est $\varphi_0 z_x$. Nous avons donc deux cas à distinguer :

1° $\varphi_0 \neq 0$, $z_x = 0$; 2° $\varphi_0 = 0$.

Considérons d'abord le premier cas et faisons $z_x = 0$. Le coefficient de $f^{(n-2)}(x)$ est alors $\varphi_0 z'_x$; d'où l'on déduit aussi $z'_x = 0$. On trouverait de la même façon $z'_x = z''_x = \ldots = z_x^{(n-1)} = 0$. On arrive donc à cette conclusion que, sur la droite $x = \alpha$, l'intégrale particulière $z(x, y, \alpha)$ doit s'annuler, ainsi que ses dérivées prises par rapport à x, jusqu'à l'ordre $n - 1$,

$$\left.\frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{\partial^2 z(x, y, \alpha)}{\partial x^2}\right|_{x=\alpha} = \ldots = \left.\frac{\partial^{n-1} z(x, y, \alpha)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\alpha} = 0.$$

Comme, d'autre part, la condition $\varphi_0 \neq 0$ exprime que la droite $x = \alpha$ n'est pas une caractéristique, l'intégrale satisfaisant aux conditions initiales que nous venons d'indiquer, sur la droite $x = \alpha$, est identiquement nulle. La formule (5) ne donne donc que la solution 0. Il reste à examiner la seconde hypothèse, $\varphi_0 = 0$. Nous trouvons dans ce cas :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varphi_1 z_x = 0, \qquad \left.\begin{array}{l}\varphi_1 z'_x + C^1_{n-2}\varphi_1 \dfrac{\partial z_x}{\partial x} \\ \qquad + \varphi_2 z_x\end{array}\right| = 0, \qquad \left.\begin{array}{l}\varphi_1 z''_x + C^1_{n-3}\varphi_1 \dfrac{\partial z'_x}{\partial x} + C^2_{n-2}\varphi_1 \dfrac{\partial^2 z_x}{\partial x^2} \\ \qquad + \varphi_2 z'_x + C^1_{n-3}\varphi_2 \dfrac{\partial z_x}{\partial x} \\ \qquad\qquad + \varphi_3 z_x\end{array}\right| = 0, \\
\left.\begin{array}{l}C^0_{n-p-2}\varphi_1 z_x^{(p)} + C^1_{n-p-1}\varphi_1 \dfrac{\partial z_x^{(p-1)}}{\partial x} + \ldots + C^p_{n-2}\varphi_1 \dfrac{\partial^p z_x}{\partial x^p} \\ \qquad C^0_{n-p-2}\varphi_2 z_x^{(n-1)} \qquad + C^{p-1}_{n-3}\varphi_2 \dfrac{\partial^{p-1} z_x}{\partial x^{p-1}} \\ \qquad\qquad + C^{p-2}_{n-4}\varphi_3 \dfrac{\partial^{p-2} z_x}{\partial x^{p-2}} \\ \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + C^0_{n-p-2}\varphi_p z_x\end{array}\right| = 0,
\end{array}\right.$$

C^n_m désignant le nombre de combinaisons de m quantités, n à n.

Si l'on suppose que dans φ_1 le coefficient de $\dfrac{\partial}{\partial y}$ soit différent de zéro, les équations (7) définissent successivement les valeurs de z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$ en fonction de y, sur la caractéristique $x = \alpha$ à l'aide d'équations différentielles du premier ordre. Chacune d'elles se trouve entièrement déterminée quand on connaît sa valeur pour une valeur particulière y_0 de y, qui peut être, d'ailleurs, elle-même une fonction de α. D'autre part, dans cette hypothèse, x étant une variable caractéristique simple, il existe, d'après notre théorème fondamental des intégrales telles que, pour $x = \alpha$, les valeurs de

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}$$

soient égales à des fonctions données de y. Il y en a donc qui satisfont

aux conditions initiales définies par les équations (7). Les intégrales principales dépendent encore d'une fonction arbitraire qui sera, par exemple, la valeur que prendra chacune d'elles sur la droite arbitraire $y = y_0$. Cette dernière donnée achève de déterminer les fonctions initiales définies par les équations (7).

Par conséquent, quand x est une variable caractéristique simple, il existe une famille correspondante d'intégrales principales. Chacune d'elles est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une courbe analytique quelconque autre que l'une des caractéristiques de la famille considérée.

Dans un domaine E, ne contenant aucun point critique des coefficients de l'équation, ni aucun point de la courbe discriminante, l'intégrale principale, dont la fonction initiale est holomorphe, est elle-même une fonction holomorphe, pourvu que la portion de courbe arbitraire sur laquelle cette fonction initiale se trouve déterminée n'admette aucune tangente caractéristique de la famille considérée.

19. *Développement des intégrales principales.* — Au lieu de calculer les valeurs initiales de z et de ses dérivées pour $x = \alpha$, nous pouvons procéder d'une façon différente et arriver à des équations dont la loi de formation est plus simple que celle des équations (7).

Considérant l'intégrale principale comme une fonction de α, cherchons à la développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$.

Soit

$$(8)\quad z(x, y, \alpha) = u_0 + u_1 \frac{(x-\alpha)}{1} + u_2 \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots + u_n \frac{(x-\alpha)^n}{n} + \ldots,$$

les u_i désignant des fonctions de x et de y.

On a

$$(9)\quad \frac{\partial^p z}{\partial x^p} = \frac{\partial^p u_0}{\partial x^p} + \frac{p}{1}\frac{\partial^{p-1} u_1}{\partial x^{p-1}} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{\partial^{p-2} u_2}{\partial x^{p-2}} + \ldots + \frac{x-\alpha}{1}\left\{\frac{\partial^p u_1}{\partial x^p} + \frac{p}{1}\frac{\partial^{p-1} u_2}{\partial x^{p-2}} + \ldots\right\}.$$

Quand on fait $x = \alpha$, ou $\alpha = x$, les expressions de la forme (9) se réduisent à leur premier terme :

$$(10)\quad \begin{cases} z_x = u_0, \qquad z'_x = \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + u_1 + \ldots, \\ z^p_x = \dfrac{\partial^p u_0}{\partial x^p} + \dfrac{p}{1}\dfrac{\partial^{p-1} u_1}{\partial x^{p-1}} + \dfrac{p(p-1)}{1.2}\dfrac{\partial^{p-2} u_2}{\partial x^{p-2}} + \ldots \end{cases}$$

Ces égalités démontrent d'abord que le système des fonctions initiales $z_x, z'_x, \ldots, z^{(n-2)}_x$ est équivalent, comme données, au système des fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{n-2}$.

En portant, dans les équations (7), les valeurs de $z_x, z'_x, \ldots$ en fonction des u_i, nous obtiendrons les conditions auxquelles doivent satisfaire ces nouvelles fonctions. Pour faciliter les calculs, nous allons introduire une nouvelle notation symbolique.

20. Nous pouvons écrire, d'après les équations (10),

$$z^{(p)}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)^p,$$

en convenant de remplacer les exposants de u par des indices et u^0 par u_0; les puissances de $\dfrac{\partial}{\partial x}$ devront, bien entendu, être considérées comme des indices de différentiation; cependant, comme la signification différentielle du symbole $\dfrac{\partial}{\partial x}$ n'interviendra pas dans le calcul suivant, nous le remplacerons, pour plus de simplicité, par X, de sorte que z^p_x se trouvera remplacé par $(X + u)^p$.

L'équation générale du système (7) devient alors

$$\begin{array}{l|l|l} 0 = \quad C^p_{n-2}\ \varphi_1 X^p & u^0 + C^{p-1}_{n-3}\ \varphi_1 X^{p-1} & (X + u) + \ldots \\ \quad + C^{p-1}_{n-3}\ \varphi_2 X^{p-1} & \quad + C^{p-2}_{n-4}\ \varphi_2 X^{p-2} & \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \quad + C^{p-i+2}_{n-i}\ \varphi_{i-i} X^{p-i+2} & \quad + C^0_{n-p-2}\ \varphi_{p-1} & \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \quad + C^0_{n-p-2}\ \varphi_p & & \end{array}$$

Dans ce développement, le coefficient de u^r est égal à

$$\varphi_1 X^{p-r} \left(C_{n-r-2}^{p-r} C_r^r + C_{n-r-3}^{p-r-1} C_{r+1}^r + \ldots + C_{n-r-i-2}^{p-r-i} C_{r+i}^r + \ldots\right)$$
$$+ \varphi_2 X^{p-r-1} \left(C_{n-r-3}^{p-r-1} C_r^r + C_{n-r-4}^{p-r-2} C_{r+1}^r + \ldots\right) + \ldots.$$

D'autre part, on a évidemment

$$C_r^r C_\mu^\nu + C_{r+1}^r C_{\mu-1}^\nu + \ldots + C_{r+\mu-\nu}^r C_\nu^\nu = C_{\mu+r-\nu}^{\nu+r+1},$$

ce qui donne, pour le coefficient de u^r,

$$C_{n-1-r}^{p-r} \varphi_1 X^{p-r} + C_{n-2}^{p-r-1} \varphi_2 X^{p-r-1} + \ldots$$
$$= \frac{1}{(n-1-p+r)!} [(n-1)(n-2)\ldots(p-r+1)\varphi_1 X^{p-r}$$
$$+ (n-2)(n-3)\ldots(p-r)\varphi_2 X^{p-r-1} + \ldots].$$

La parenthèse est la dérivée par rapport à X du polynome suivant

$$\varphi_1 X^{n-1} + \varphi_2 X^{n-2} + \ldots + \varphi_0,$$

qu'on déduit de l'expression différentielle

$$D = \varphi_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \varphi_2 \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} + \ldots,$$

en remplaçant le symbole $\frac{\partial}{\partial x}$ par X.

Désignons par

$$D_x', \quad D_x'', \quad \ldots, \quad D_x^q$$

les dérivées successives de D par rapport au symbole $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$D_x^q(u) = (n-1)(n-2)\ldots(n-q)\varphi_1 \frac{\partial^{n-q-1}}{\partial x^{n-q-1}} + \ldots.$$

Il résulte alors des calculs précédents que l'équation générale du système (7) pourra s'écrire

$$\sum \frac{1}{(n-\mu)!} D_x^{n-\mu}(u_{p+1-\mu}) = 0.$$

Ce système devient donc

$$(7') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_0) = 0, \qquad \frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_1) + \frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_p) + \frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_{p-1}) + \ldots + \frac{1}{(n-p-1)!} D_{x^{n-p-1}}^{n-p-1}(u_0) = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations, dont la formation est très simple, définissent complètement les fonctions u quand on connaît leurs valeurs initiales pour $y = y_0$.

Les fonctions $u_n, u_{n+1}, \ldots$, satisfont à des équations en tout semblables à celles du système $(7')$. En écrivant que l'expression $z(x, y, \alpha)$, définie par la formule (8), satisfait à l'équation donnée on trouve, pour les coefficients dont l'indice est supérieur à $n-1$, la relation de récurrence

$$(11) \quad \frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_{n-p-1}) + \frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_{n-p-2}) + \ldots + D(u_p) = 0.$$

On retrouve facilement le système $(7')$ et l'équation (11) en partant de la fonction

$$z_{n-1}(x, y, \alpha) = u_0 \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + u_1 \frac{(x-\alpha)^n}{n!} + \ldots + u_p \frac{(x-\alpha)^{n+p-1}}{(n+p-1)!} + \ldots,$$

qui doit être une solution de $D(z) = 0$, quelle que soit la constante arbitraire α.

Considérons, en effet, l'intégrale principale

$$z(x, y, \alpha) = u_0 + u_1 \frac{(x-\alpha)}{1} + u_2 \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \ldots;$$

en faisant, dans la formule (5),

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha - x_0)^{p-1}}{(p-1)!},$$

on est conduit à l'intégrale nouvelle

$$z_p(x, y, x_0) = u_0 \frac{(x-x_0)^p}{p!} + u_1 \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots,$$

qui est elle-même une intégrale principale, si l'on y regarde x_0 comme un paramètre; en faisant $p = n - 1$, on trouve l'intégrale z_{n-1}, à laquelle nous avons fait allusion plus haut.

Il est évident d'ailleurs que toute intégrale holomorphe qui s'annule avec toutes ses dérivées d'ordre inférieur à $n - 1$ pour $x = \alpha$; α désignant un paramètre variable est une intégrale principale; si l'on a pu trouver une pareille intégrale par un procédé quelconque, il suffira de la développer en série suivant les puissances de $x - \alpha$, les coefficients étant des fonctions de x et de y, pour avoir un système de valeurs des fonctions $u_0, u_1, \ldots$.

Soit, par exemple, l'intégrale suivante, où l'on suppose $p \geq n - 1$:

$$A_0 \frac{(x-\alpha)^p}{p!} + A_1 \frac{(x-\alpha)^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots + A_r \frac{(x-\alpha)^{p+r}}{(p+r)!} + \ldots;$$

la suite des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ est l'un des systèmes de valeurs des coefficients $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

21. *Quand on connaît une intégrale principale particulière relative à la variable caractéristique x, on peut en déduire toutes les autres relatives à la même variable.*

En effet, soit $z(x, y, \alpha)$ l'intégrale considérée que je suppose différente de zéro pour $x = \alpha$. Dans l'expression

$$Z = C z(x, y, x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha \tag{12}$$

qui dépend du paramètre x_0, on peut disposer de la constante C et de la fonction arbitraire $f(\alpha)$, de telle façon que z devienne égale à une fonction arbitrairement choisie $\varphi(x)$ pour $y = y_0$. Cette proposition se trouve dans ma thèse (*Annales de l'École Normale*, p. 244; 1895). D'autre part, pour $x = x_0$, z et ses dérivées relatives à x satisfont aux conditions qui définissent les intégrales principales. Donc la formule (12) représente l'intégrale principale la plus générale relative à la caractéristique x.

Si l'on suppose $f(\alpha)$ holomorphe, elle est la somme d'éléments de

la forme $C_r \frac{(\alpha - x_0)^{r-1}}{(r-1)!}$ et, par suite, l'intégrale considérée sera la somme d'éléments de la forme $C_r z_r(x, y, x_0)$

$$Z = C_0 z_0(x, y, x_0) + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots,$$

en écrivant z_0 au lieu de $z(x, y, x_0)$ pour plus d'uniformité. Donc les intégrales principales holomorphes sont développables en série linéaire de fonctions z_p.

D'autre part, il est évident que toute série convergente de cette forme représente une intégrale principale. Cette remarque s'appliquerait également aux séries ayant pour éléments des fonctions de la forme

$$z_\mu = u_0 \frac{(x-\alpha)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} + u_1 \frac{(x-\alpha)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+2)} + \ldots + u_r \frac{(x-\alpha)^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r+1)} + \ldots,$$

μ désignant un nombre non entier quelconque supérieur à $n-2$. Mais les intégrales qu'on obtiendrait ainsi ne seraient plus holomorphes en x dans le voisinage de x_0.

Nous avons supposé que l'intégrale principale considérée était différente de zéro pour $x = \alpha$. Supposons maintenant qu'elle s'annule, tout en étant holomorphe; les dérivées de l'intégrale par rapport au paramètre α sont encore des intégrales principales jusques et y compris la première dérivée qui ne s'annule pas sur la caractéristique $x = \alpha$. On pourra donc en déduire également toutes les autres intégrales principales par la formule suivante :

$$Z = C_0 \frac{\partial^p z(x, y, x_0)}{\partial x_0^p} + C_1 \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_0^{p-1}} + \ldots + C_p z + \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

où p désigne l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas pour $\alpha = x$.

En résumé, nous voyons qu'il existe des intégrales principales relatives aux différentes variables caractéristiques simples et que la connaissance d'une intégrale de chaque série permet de calculer toutes les autres de la même série. Soit ξ_i une variable caractéristique

et $z(x, y, \alpha)$ une intégrale principale correspondante; l'intégrale

$$\int_{\theta_{i+0}}^{\theta_i} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

est une nouvelle solution de l'équation proposée, quelle que soit la fonction arbitraire $f(\alpha)$, θ_i désignant une fonction déterminée de ξ_i. On peut évidemment remplacer ξ_i par θ_i pour définir les caractéristiques, ou bien remplacer α par une fonction de α de telle façon que la limite supérieure de l'intégrale devienne ξ_i. Nous écrirons donc, en général,

$$\int_{\xi_{i+0}}^{\xi_i} f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

et nous appellerons *caractéristique paramétrique* de l'intégrale principale la caractéristique

$$\xi_i = \alpha.$$

22. *Des intégrales principales dans le cas des caractéristiques multiples.*

Envisageons maintenant le cas où x est une variable caractéristique double. Les coefficients des dérivées $\frac{d^n z}{\partial x^n}$ et $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$ sont nuls dans l'équation, mais $\frac{\partial^{n-1} z}{d x^{n-1}}$ peut avoir un coefficient différent de zéro. Ce coefficient, que nous avons appelé φ_1, ne contient plus d'indice de dérivation par rapport à y. Supposons donc $\varphi_1 \neq 0$. En nous reportant au calcul du n° **18**, nous trouvons

$$z_x = 0, \qquad z'_x = 0, \qquad \ldots, \qquad z_x^{(n-2)} = 0.$$

Or $x = \alpha$ étant une caractéristique du second ordre, on ne peut plus se donner arbitrairement sur cette caractéristique les valeurs de z et de ses $n-2$ premières dérivées extérieures : ces données, en général, ne correspondent à aucune intégrale holomorphe; mais, s'il en existe une qui y satisfasse, elle est entièrement déterminée. Dans le cas actuel, cette intégrale se réduit évidemment à zéro.

Soit maintenant $\varphi_1 = 0$. La dérivée $\frac{\partial^{n-1} x}{d x^{n-1}}$ ne figurant plus dans

l'équation, les conditions trouvées au n° **18** donnent

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_2 z_x = 0, \qquad \varphi_2 z'_x + C^1_{n-3}\varphi_2 \frac{\partial z_x}{\partial x} + \varphi_3 z_x = 0.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_2 z_x^{(n-2)} + C^1_{n-3}\varphi_2 \frac{\partial z_x^{n-4}}{\partial x} + C^2_{n-3}\varphi_2 \frac{\partial^2 z_x^{n-4}}{\partial x^2} + \ldots + \varphi_3 z_x^{(n-3)} + C^2_{n-4}\varphi_3 \frac{\partial z_x^{n-4}}{\partial x} + \varphi_4 z_x^{n-4} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ce système définit successivement les fonctions $z_x, z'_x, z''_x, \ldots, z_x^{(n-2)}$ par une équation différentielle du second ordre, quand on connaît toutes les précédentes. Pour achever de les déterminer, il faudra donc donner leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières par rapport à y, pour une valeur particulière y_0 de y. Ces valeurs seront elles-mêmes entièrement déterminées quand on connaîtra les valeurs de y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, pour $y = y_0$ en fonction de x et de α.

Il existe donc dans le cas actuel, d'après notre second théorème fondamental, des intégrales principales dépendant de deux fonctions arbitraires.

Nous allons étudier le développement en série de ces intégrales. Les calculs du n° **21** sont applicables, car rien ne suppose dans l'établissement de nos formules que la dérivée symbolique $D_{x^{n-1}}^{n-1}$ soit du premier degré par rapport à y. Par conséquent, si l'on suppose l'intégrale développée suivant les puissances de $x - \alpha$, on trouvera, pour déterminer les coefficients du développement, la suite d'équations

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_2(u_0) = 0.\\
&\frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_1) + \frac{1}{(n-3)!} D_{x^{n-3}}^{n-3}(u_0) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_p) + \frac{1}{(n-3)!} D_{x^{n-3}}^{n-3}(u_{p-1}) + \ldots + \frac{1}{(n-r)!} D_{x^{n-r}}^{n-r}(u_{p-r-2}) + \ldots = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons par $f(x, \alpha)$, $\varphi(x, \alpha)$ les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $y = y_0$, et soient

$$f(x, \alpha) = f_0(x) + \frac{x-\alpha}{1} f_1(x) + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} f_2(x) + \ldots,$$

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi_0(x) + \frac{x-\alpha}{1} \varphi_1(x) + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} \varphi_2(x) + \ldots;$$

les valeurs initiales des coefficients u et de leurs dérivées seront

$$u_i = f_i, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial y} = \varphi_i.$$

23. *Systèmes fondamentaux.* — Soient $\zeta(x, y, \alpha)$, $\zeta'(x, y, \alpha)$ deux intégrales principales relatives à la caractéristique double x :

$$\zeta = u_0 + \frac{x-\alpha}{1} u_1 + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} u_2 + \ldots,$$

$$\zeta' = v_0 + \frac{x-\alpha}{1} v_1 + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} v_2 + \ldots.$$

Nous dirons qu'elles forment un système fondamental si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \\ \zeta & \zeta' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Nous supposerons même cette condition remplie pour $x = \alpha$; dans ce cas, les deux fonctions u_0 et v_0 forment elles-mêmes un système fondamental de solutions de l'équation

$$\varphi_2(u) = 0.$$

Tel est le système défini par les fonctions initiales suivantes :

$$\zeta(x, y_0, \alpha) = 1, \qquad \zeta'(x, y_0, \alpha) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \zeta(x, y, \alpha)}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \zeta'(x, y, \alpha)}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 1$$

et que nous appellerons un *système fondamental canonique* relatif à la courbe $y = y_0$.

THÉORÈME. — *Lorsque ζ et ζ' sont deux intégrales principales relatives à x, formant un système fondamental, on peut disposer des fonctions arbitraires $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ et des constantes* C *et* C′ *de telle façon que l'expression*

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} Z &= C\zeta(x, y, x_0) + C'\zeta'(x, y, x_0) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} f_1(\alpha)\zeta(x, y, \alpha)\,d\alpha + \int_{x_0}^{x} f_2(\alpha)\zeta'(x, y, \alpha)\,d\alpha \end{aligned}\right.$$

satisfasse à des conditions initiales de la forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &Z(x, y_0) = F(x), \\ &\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{y=y_0} = \Phi(x), \end{aligned}\right.$$

$F(x)$ *et* $\Phi(x)$ *désignant des fonctions arbitraires.*

Considérons, en effet, une équation du second ordre ne contenant aucune différentiation par rapport à x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P\frac{\partial z}{\partial y} + Qz = 0.$$

Soient z_1 et z_2 deux intégrales de cette équation formant un système fondamental; l'intégrale générale est

$$(17)\qquad Z = z_1 X_1 + z_2 X_2,$$

X_1 et X_2 désignant deux fonctions arbitraires de x.

Prenons deux fonctions arbitraires $\varphi(x, \alpha)$, $\psi(x, \alpha)$ ne s'annulant pas pour $x = \alpha$ mais restant holomorphes. L'expression

$$(18)\quad Z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \int_{x_0}^{x} z_1 \varphi(x, \alpha) f_1(\alpha)\,d\alpha + \int_{x_0}^{x} z_2 \psi(x, \alpha)\,d\alpha$$

est équivalente à l'expression (17), car les intégrales

$$C_1 + \int \varphi(x, \alpha) f_1(\alpha)\, d\alpha,$$

$$C_2 + \int \psi(x, \alpha) f_2(\alpha)\, d\alpha$$

peuvent représenter des fonctions arbitrairement choisies de x.

Il résulte donc de là qu'on peut disposer des arbitraires de la forme (18) pour satisfaire aux conditions initiales (16), pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 \varphi(x, x) & z_2 \psi(x, x) \\ \frac{\partial}{\partial y}[z_1 \varphi(x, x)] & \frac{\partial}{\partial y}[z_2 \psi(x, x)] \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur les fonctions $\varphi(x, \alpha)$, $\psi(x, \alpha)$, qui ne s'applique aux fonctions $\zeta(x, y_0, \alpha)$, $\zeta'(x, y_0, \alpha)$, notre théorème est démontré.

Dans le cas où le système fondamental considéré est canonique pour la courbe $y = y_0$, la détermination des fonctions arbitraires qui satisfont aux conditions initiales (16) est immédiate.

Il est facile de déduire de ce qui précède l'expression générale des intégrales principales relatives à la caractéristique double. Il suffit de considérer, dans la formule (16), x_0 comme un paramètre, les constantes C, C′ et les fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ pouvant elles-mêmes dépendre de ce paramètre. Les résultats qu'on en déduirait sont entièrement analogues à ceux que nous avons établis dans le cas des caractéristiques simples.

24. L'étude que nous venons de faire indique la marche à suivre pour l'étude des intégrales principales dans le cas des caractéristiques multiples d'ordre supérieur au second. Nous n'entreprendrons pas cette étude pour le cas général. Nous nous contenterons de signaler l'analogie qui existe entre la recherche des intégrales principales et celle des asymptotes des courbes algébriques. La détermination des

caractéristiques peut être assimilée à celle des directions asymptotiques et les conditions d'existence des intégrales principales sont analogues à celles des asymptotes relatives à une direction donnée.

25. *Représentation de l'intégrale générale par les intégrales principales.*

Considérons une équation à caractéristiques toutes distinctes, et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ un système de fonctions caractéristiques, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ un système correspondant d'intégrales principales.

L'expression

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f_i(\alpha)\zeta_i(x, y, \alpha)\, d\alpha,$$

où les $\xi_{i,0}$ désignent des valeurs initiales quelconques, représente une intégrale de l'équation $D(z) = 0$ dépendant de n fonctions arbitraires. Nous allons montrer que, moyennant certaines conditions, c'est l'intégrale générale. Nous considérerons pour cela, au lieu de l'expression (19), la suivante

$$(19') \qquad z = \sum C_i \xi_i(x, y, \alpha_0) + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f_i(\alpha)\zeta_i(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

Il s'agit de faire voir qu'il est en général possible de disposer des arbitraires de la formule (19′) de manière que, pour $y = y_0$, la fonction z et ses $n - 1$ premières dérivées extérieures prennent des valeurs choisies arbitrairement. Quand on fait $y = y_0$, les ξ_i deviennent des fonctions de x que nous désignerons par ξ'_i; aucune d'entre elles ne se réduit à une constante. Les dérivées par rapport à y d'un terme quelconque de la formule (19′) contiennent en général, en dehors du signe d'intégration, des termes dépendant de la fonction arbitraire et de ses dérivées. Pour éviter d'introduire ces termes dans les expressions que nous aurons à considérer, je suppose que les intégrales principales s'annulent sur les caractéristiques paramétriques, ainsi que leurs dérivées, jusqu'à l'ordre $n - 2$ inclusivement, les dérivées d'ordre

$n-1$ n'étant pas toutes nulles. Négligeant alors les termes additionnels $\Sigma C_i \zeta_i(x, y, \alpha_0)$, je vais démontrer que l'on peut, en général, disposer des arbitraires de la formule (19) de manière que les dérivées

$$\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2} \partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}},$$

prennent des valeurs données à l'avance, en fonction de x pour $y = y_0$. Nous supposerons que ces fonctions arbitraires s'annulent au point (x_0, y_0) : cette hypothèse ne restreint pas la généralité de la formule (19') à cause des termes additionnels qui y figurent.

Nous avons à résoudre un système d'équations de la forme suivante :

$$(20) \qquad \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f_i(\alpha) \frac{\partial^{n-1} \zeta_i(x, y, \alpha)}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k} d\alpha \qquad (y = y_0).$$

Considérons une équation quelconque d'ordre n ne contenant aucune dérivée par rapport à x

$$(21) \qquad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} + P_2 \frac{\partial^{n-2} z}{\partial y^{n-2}} + \ldots + P_n z = 0.$$

Toute intégrale de cette équation est une intégrale principale. Déterminons un système d'intégrales $u_i(x, y, \alpha)$ par la condition que l'on ait pour $y = y_0$

$$\frac{\partial^{n-1} u_i}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k} = \frac{\partial^{n-1} \zeta_i(x, y, \alpha)}{\partial x^{n-k-1} \partial y^k}.$$

Si les intégrales u_i forment un système fondamental, l'intégrale générale de l'équation (21) est

$$(22) \qquad z = \sum C_i u_i(x, y, \alpha_{i,0}) + \sum_{i=0}^{i=n} \int_{\xi_{i,0}}^{\xi_i} f_i(\alpha) u_i(x, y, \alpha) d\alpha,$$

comme cela résulte de la remarque du n° **25** généralisée. On peut donc disposer des arbitraires de la formule, de manière que z prenne pour $y = y_0$, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées extérieures, des valeurs

données à l'avance en fonction de x. Par suite, les équations (20) peuvent elles-mêmes être résolues, pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_1}{\partial x^{n-1}} & \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_2}{\partial x^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_n}{\partial x^{n-1}} \\ \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_1}{\partial x^{n-2}\,\partial y} & \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_2}{\partial x^{n-2}\,\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_n}{\partial x^{n-2}\,\partial y} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_1}{\partial y^{n-1}} & \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_2}{\partial y^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{n-1}\zeta_n}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Il est d'ailleurs possible de traiter directement ce problème, comme nous avons déjà traité le problème relatif à l'intégrale

$$\int f(\alpha)\,\zeta(x,\alpha)\,d\alpha,$$

dans notre Mémoire sur les équations du second ordre.

On voit donc que l'intégrale générale de l'équation $D(z)=0$ est bien représentée par la formule (19') ou par la formule suivante, où l'on suppose les limites inférieures indéterminées :

$$(23)\qquad z=\sum\int^{\xi_i} f(\alpha)\,\zeta_i(x,y,\alpha)\,d\alpha.$$

Lorsqu'il y a des caractéristiques multiples, l'intégrale n'est plus, en général, complètement représentable par cette formule, à moins qu'il n'existe un système fondamental d'intégrales principales.

26. Chaque terme de la formule (23) peut être développé en série ordonnée suivant les intégrales successives d'une fonction arbitraire.

Désignons par $S_n F(\xi)$ l'intégrale $n^{\text{ième}}$ de $F(\xi)$ prise à partir d'une limite inférieure quelconque

$$S_n F(\xi)=\int^{\xi}\frac{(\xi-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}F'(\alpha)\,d\alpha,$$

de telle façon que l'on ait

$$\frac{d^p S_n F(\xi)}{d\xi^p} = S_{n-p} F(\xi).$$

On a

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int^{\xi} F(\alpha)\zeta(x, y, \alpha)\, d\alpha \\ &= \sum \int^{\xi} F(\alpha) \frac{u_p(x, y)}{p} \frac{(\xi - \alpha)^p}{1} d\alpha \\ &= u_0 F(\xi) + u_1 S_1 F(\xi) + u_2 S_2 F(\xi) + \ldots + u_n S_n F(\xi) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Toutes les intégrations sont faites à partir d'une même limite inférieure et la série précédente admet, en général, un domaine de convergence dans le voisinage de cette limite.

Dans le cas des caractéristiques distinctes, toute intégrale est la somme de n séries particulières de la forme (24). La fonction arbitraire de chaque série dépendant d'une variable caractéristique, il en résulte que la formule (23) [ou la formule équivalente (19)] met en évidence la portion de l'intégrale générale qui se trouve plus particulièrement liée à chacune de ces variables.

On sait que l'intégrale générale de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$ est

$$z = F(x) + F_1(y);$$

la forme (19), (23), (24) peut être regardée comme la généralisation de cette formule. J'ai pensé, d'après ces considérations, que l'on pouvait donner au terme

$$\int^{\xi_i} f_i(\alpha)\zeta_i\, d\alpha$$

de l'intégrale générale le nom d'*intégrale partielle*, relative à la caractéristique ξ_i.

27. *Forme d'Euler.* — Parmi les intégrales principales relatives à une même caractéristique ξ, il peut quelquefois en exister dont le développement en série soit limité. Soit, par exemple,

$$\zeta(x, y, \alpha) = u_0 + u_1 \frac{\xi - \alpha}{1} + u_2 \frac{(\xi - \alpha)^2}{1.2} + \ldots + u_p \frac{(\xi - \alpha)^p}{p!}.$$

L'intégrale partielle correspondante devient

$$u_0 F(\xi) + u_1 S F(\xi) + \ldots + u_p S_p F(\xi);$$

ou bien, en posant $S_p F(\xi) = \varphi(\xi)$,

$$u_0 \frac{d^p \varphi(\xi)}{d\xi^p} + u_1 \frac{d^{p-1} \varphi(\xi)}{d\xi^{p-1}} + \ldots + u_p \varphi(\xi).$$

Cette forme est bien connue pour les intégrales partielles des équations du second ordre, intégrables par la méthode de Laplace : nous l'appellerons la *forme d'Euler*.

Une intégrale de la forme d'Euler dérive toujours, nécessairement, d'une intégrale principale, quel que soit l'ordre de multiplicité de la caractéristique correspondante. Les équations de la forme (11) qui déterminent les coefficients successifs permettent de reconnaître si le développement peut se limiter. En égalant à zéro tous les coefficients dont l'indice est supérieur à p, nous avons le système suivant dans le cas d'une caractéristique simple x :

$$\frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_0) = 0,$$

$$\frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_1) + \frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_0) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(n-1)!} D_{x^{n-1}}^{n-1}(u_n) + \frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_{n-1}) + \ldots + D(u_1) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(n-2)!} D_{x^{n-2}}^{n-2}(u_p) + \frac{1}{(n-3)!} D_{x^{n-3}}^{n-3}(u_{p-1}) + \ldots = 0,$$

$$\frac{1}{(n-3)!} D_{x^{n-3}}^{n-3}(u_p) + \frac{1}{(n-4)!} D_{x^{n-4}}^{n-4} u_{p-1} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D(u_p) = 0.$$

Il sera nécessaire et suffisant que ces équations soient compatibles pour qu'il existe une intégrale de la forme considérée.

On pourrait trouver pour les équations de cette espèce une mé-

thode de réduction analogue à celle de Laplace. Je la développerai dans un autre Mémoire.

TROISIÈME PARTIE

SINGULARITÉS ACCIDENTELLES.

28. Les points singuliers des intégrales d'une équation linéaire sont de deux sortes : 1° les points singuliers *propres*, dont la position est entièrement déterminée par les coefficients de l'équation; 2° les points singuliers *accidentels* qui dépendent des fonctions initiales.

J'ai déjà introduit ces dénominations dans mon Mémoire sur les équations du second ordre. Le nom de *singularités accidentelles* m'a paru propre à caractériser celles qui dépendent des conditions initiales. Ces singularités n'affectent pas d'une manière normale la généralité des intégrales : elles interviennent en quelque sorte accidentellement et varient d'une intégrale à l'autre. Lorsque les fonctions initiales dépendent de certains paramètres, les points singuliers accidentels correspondants peuvent également varier avec ces paramètres; nous les appellerons dans ce cas des *points singuliers mobiles*.

Dans le cas général où les caractéristiques sont partout simples, sauf sur la courbe discriminante, et où, par conséquent, l'intégrale est représentée par la formule (19'), la nature et la forme des singularités accidentelles sont immédiatement évidentes.

Considérons un terme de la formule

$$\int_{\xi_0}^{\xi} f(\alpha)\,\zeta(x, y, \alpha)\,d\alpha,$$

et soit $\alpha = t$ un point critique de la fonction $f(\alpha)$, le terme considéré admettra pour points critiques tous les points de la caractéristique $\xi = t$, sauf peut-être dans le cas où ces points seraient déjà des points critiques de l'intégrale principale ζ. Mais cette hypothèse peut toujours être exclue si la caractéristique $\xi = t$ n'est pas une ligne singulière propre des coefficients de l'équation.

Soit maintenant (x_1, y_1) un point critique accidentel de l'intégrale Z: ce sera nécessairement un point critique de l'un des termes, et comme il est permis de supposer l'intégrale principale correspondante holomorphe au point considéré, il faudra que le point $\alpha = \xi(x_1, y_1)$ soit un point critique de la fonction $f(\alpha)$; mais alors tous les points de la caractéristique

$$\xi(x, y) = \xi(x_1, y_1)$$

sont des points critiques de l'intégrale; nous avons donc ce théorème :

Lorsqu'un point P *est un point singulier accidentel d'une intégrale* z *d'une équation linéaire* $D(z) = 0$ *à caractéristiques distinctes, l'intégrale admet comme courbe singulière toute une caractéristique passant par* P.

Les lignes singulières accidentelles sont donc des caractéristiques, en nombre limité ou illimité, formant une suite continue ou discontinue.

29. Il est facile d'étendre cette propriété au cas où l'intégrale n'est pas entièrement représentable par la formule (23).

Considérons une courbe analytique (C) qui ne soit pas une ligne critique propre; si (C) n'est pas une caractéristique, nous pourrons trouver une portion P de la courbe qui ne contienne aucun point à tangentes caractéristiques, ni points singuliers des coefficients de l'équation, ni points de la courbe discriminante. Cette portion de courbe admet un *domaine régulier* Σ', l'englobant entièrement et n'ayant de commun avec elle que le contour. Prenons une seconde courbe analytique infiniment voisine (C') ne coupant pas C sur la portion (P) et jouissant des mêmes propriétés. Soit Σ' le domaine régulier de (P'). Les deux domaines Σ et Σ' se déduisent l'un de l'autre par une déformation continue, car les coefficients du polynome (*voir* n° **14**)

$$\varphi\left(S, \frac{1}{\rho}\right)$$

sont des fonctions continues. Nous pouvons donc supposer (P') assez

voisin de (P) pour que Σ' contienne telle portion que nous voudrons de (P). Donc, si (P) contient des points singuliers accidentels, nous pourrons admettre que quelques-uns de ces points soient contenus dans Σ'. Les valeurs de l'intégrale et de ses $n-1$ premières dérivées extérieures ne seraient donc pas holomorphes sur (P'). Par conséquent (P') contiendrait également des points singuliers.

Il résulte de là que les points singuliers accidentels ne sont jamais isolés; si une courbe analytique en contient, toute courbe infiniment voisine en contient également, à moins que la première ne soit une *caractéristique*. Par conséquent :

Les courbes singulières accidentelles sont toujours des caractéristiques.

30. Je rappelle ici la démonstration que j'ai donnée dans ma thèse, de cette même propriété, en partant de considérations très simples, mais qui exigent toutefois quelques restrictions. Supposons que la droite $x=a$ soit une ligne singulière accidentelle; lorsque nous ferons tendre x vers a par un chemin déterminé de longueur finie, z et ses $n-1$ premières dérivées extérieures peuvent tendre vers des limites holomorphes en y, ou devenir infinies, ou ne tendre vers aucune limite sans devenir infinies. Laissons de côté ce dernier cas. Si les fonctions considérées tendent vers des limites holomorphes, elles déterminent une intégrale holomorphe, pourvu que $x=a$ ne soit pas une caractéristique; en retranchant de z cette intégrale holomorphe, nous aurons une intégrale qui s'annule sur la droite $x=a$.

Cela posé, considérons une fonction $\varphi(x,y)$ qui s'annule ou devient infinie pour $x=a$; les rapports $\frac{\varphi'_x}{\varphi}$, $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ ne pourront tendre vers aucune limite finie. Cette propriété est évidente pour le premier rapport; elle l'est aussi pour le second, si l'on se reporte aux propriétés des équations linéaires du premier ordre. Soit, en effet, $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}=\mathrm{B}(x,y)$; φ est alors une intégrale de l'équation

$$\varphi'_x-\mathrm{B}(x,y)\varphi'_y=0,$$

et toute intégrale de cette équation demeure constante sur une carac-

téristique quelconque. Cette considération m'a conduit à définir les fonctions *normales* sur une ligne singulière [1]. Pour les intégrales normales, la dérivée $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ sera infinie par rapport à toutes les autres dérivées du même ordre ou d'ordre inférieur si la fonction z et ses $n-1$ premières dérivées extérieures sont nulles ou infinies pour $x=a$. Cette dérivée doit donc disparaître de l'équation et, par suite, la droite $x=a$ doit être une caractéristique.

31. Il importe de remarquer que le résultat auquel nous sommes parvenu relativement à la nature des lignes singulières accidentelles n'est pas en opposition avec les résultats connus dans le cas des variables réelles. On sait que les intégrales analytiques réelles d'équations du second ordre, à caractéristiques imaginaires, peuvent admettre comme lignes singulières accidentelles des courbes quelconques du plan réel : telle serait par exemple une fonction harmonique admettant comme coupure le cercle $x^2+y^2-1=0$. Mais si l'on restitue aux variables x et y le domaine entier des valeurs complexes (ce qui est permis, puisqu'il s'agit de fonctions analytiques), on trouve que le cercle considéré ne constitue pas une courbe singulière: seuls les points réels de ce cercle sont des points singuliers; les véritables *courbes* singulières sont des caractéristiques, c'est-à-dire les droites isotropes issues des différents points réels du cercle.

Considérons, au contraire, le cas où toutes les caractéristiques sont réelles et supposons que l'intégrale admette comme courbe singulière réelle, accidentelle, une certaine courbe C. L'une au moins des caractéristiques passant en chaque point de C sera une courbe singulière, et l'ensemble de ces caractéristiques couvrira le plan réel dans le voisinage de C. Donc l'intégrale ne sera pas analytique dans la région considérée.

32. Dans le cas où l'intégrale est complètement représentable par la formule (19'), la partie de cette intégrale qui dépend plus particulièrement de la variable caractéristique simple ξ est figurée par un

[1] Voir mon Mémoire déjà cité sur les équations du second ordre.

terme de la forme

$$(1) \qquad v = \int^{\xi} f(\alpha)\zeta(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

C'est donc l'étude de cette expression qui donnera la forme des singularités accidentelles.

Les résultats que j'ai obtenus à cet égard dans mon Mémoire sur les équations du second ordre sont évidemment applicables au cas qui nous occupe. Je me contente d'en rappeler les principaux points.

Supposons qu'une intégrale z s'annule sur la caractéristique singulière $\xi = \xi_0$, ainsi que ses dérivées extérieures jusqu'à l'ordre $n - 2$ inclusivement, ou bien qu'elle croisse indéfiniment lorsque ξ tend vers ξ_0 suivant un chemin déterminé. Il existera alors ordinairement des fonctions $F(\xi)$ de ξ seul, telles que le rapport

$$\frac{z}{F(\xi)}$$

soit une fonction continue de x et de y lorsque ξ tend vers ξ_0 en suivant le chemin considéré.

L'intégrale principale $\zeta(x, y, \alpha)$ peut toujours, à cause des arbitraires dont elle dépend, être supposée holomorphe dans le voisinage de la caractéristique singulière étudiée, sauf en certains points de cette caractéristique. Soit

$$\zeta(x, y, \alpha) = u_0 + u_1 \frac{(\xi - \alpha)}{1} + u_2 \frac{(\xi - \alpha)^2}{1.2} + \ldots;$$

admettons que la fonction $f(\alpha)$ soit uniforme dans le domaine du point $\alpha = \xi_0$.

L'intégration de la formule (1) introduira alors en général un logarithme, et, pour que ce logarithme disparaisse, il faudra entre les coefficients u à l'infini des relations de la forme

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots = 0,$$

les a désignant des fonctions de ξ; c'est-à-dire que l'on puisse développer 0 en série de fonctions u sur les caractéristiques $\xi =$ constante.

Nous arrivons donc à cette conclusion intéressante et inattendue que *l'intégrale d'une équation linéaire ne peut pas, en général, être uniforme dans le domaine d'une caractéristique singulière accidentelle.*

La condition pour qu'il existe des caractéristiques polaires accidentelles est facile à trouver.

Soit $z(x, y, t)$ une intégrale admettant la caractéristique singulière mobile $\xi = t$, t désignant un paramètre variable.

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(t)\, z(x, y, t)\, dt,$$

prise autour du point $t = \xi$, donnera une nouvelle solution de la forme suivante, dépendant de la fonction arbitraire $F(\xi)$

$$A_0 F(\xi) + A_1 F'(\xi) + \ldots + A_n F^{(n)}(\xi).$$

L'équation admet donc une intégrale partielle de la forme d'Euler; nous pouvons l'appeler, pour abréger, une *équation eulérienne*.

La réciproque est évidente : toute équation *eulérienne* admet une infinité d'intégrales possédant des *caractéristiques polaires* accidentelles, ou même des caractéristiques singulières pour lesquelles la singularité est de la nature des points singuliers essentiels d'une fonction d'une seule variable. Mais ces caractéristiques appartiennent toujours aux familles pour lesquelles l'équation présente le caractère eulérien, et l'ordre du pôle ne peut jamais être inférieur au *rang* de la solution partielle correspondante. Ce qui précède nous amène à nous poser la question suivante, que je n'ai pas résolue.

En dehors des *équations eulériennes*, y a-t-il des équations linéaires aux dérivées partielles admettant des intégrales uniformes dans le voisinage de caractéristiques singulières accidentelles? On pourrait considérer ces équations, s'il en existe, comme des cas limites d'équations eulériennes pour lesquelles le *rang* de la solution augmenterait indéfiniment.

33. Comme dans le cas du second ordre, les intégrales admettant des caractéristiques singulières mobiles peuvent servir à intégrer complètement ou partiellement l'équation aux dérivées partielles.

Soit $z(x, y, \alpha)$ une intégrale dépendant du paramètre α et telle qu'en la considérant comme fonction de α elle admette des points critiques $\alpha = \xi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

En la considérant comme fonction de x et de y, elle admettra alors les courbes critiques

$$\xi_i(x, y) = \alpha.$$

Donc les ξ_i sont des variables caractéristiques qui peuvent être de même espèce ou d'espèces différentes.

Toute intégrale de la forme

$$\int f(\alpha)\, z(x, y, \alpha)\, d\alpha$$

prise autour d'un point critique $\alpha = \xi_i$ sera une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles; elle dépend d'une fonction arbitraire $f(\alpha)$ placée sous un signe d'intégration.

Ces expressions donnent lieu à des remarques analogues à celles que nous avons déjà faites à l'occasion des équations du second ordre. On pourra, dans certains cas, comme nous l'avons indiqué, en déduire des intégrales principales relatives à une ou plusieurs des variables caractéristiques.

Mémoire sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques;

PAR M. RAOUL BRICARD.

I.

Parmi les problèmes auxquels donne lieu l'étude du déplacement d'une figure de grandeur invariable, l'un des plus intéressants consiste à rechercher si une telle figure peut se déplacer de manière que les trajectoires décrites par tous ses points jouissent de propriétés que l'on se donne *a priori*. On exigera par exemple que toutes ces trajectoires soient des courbes d'un certain ordre, ou bien qu'elles soient tracées sur des surfaces de natures déterminées. En général, l'existence d'un déplacement satisfaisant aux conditions imposées, qui sont en nombre infini, n'est point évidente; c'est de là que provient l'attrait et en même temps la difficulté du problème.

Les travaux relatifs aux questions de cette nature sont encore peu nombreux, croyons-nous. Nous allons rappeler ici ceux dont nous avons connaissance.

M. Darboux a recherché le premier si une figure de grandeur invariable peut se déplacer de telle manière que tous les points de l'espace lié à cette figure restent sur des plans fixes. Il a montré qu'un tel déplacement est possible et que, s'il a lieu, les trajectoires de tous les points de la figure mobile sont des coniques.

M. Mannheim s'est attaché à l'étude du déplacement inverse du précédent, en traitant, par une méthode purement géométrique et d'une grande élégance, un problème qui s'énonce ainsi : *Rechercher si une figure de grandeur invariable peut se déplacer de telle manière que tous les plans liés à cette figure passent par des points fixes.* Il montre encore qu'un tel déplacement existe, et il en donne plusieurs définitions qui permettent de le concevoir de la façon la plus nette ([1]).

En dernier lieu, M. Ernest Duporcq a obtenu, sur le déplacement d'une droite dont tous les points restent sur des sphères fixes, des résultats sur lesquels je reviendrai un peu plus loin.

Après les déplacements qui permettent à tous les points d'une figure de grandeur invariable de décrire des lignes planes, il est naturel d'étudier ceux dans lesquels tous les points d'une telle figure ont pour trajectoires des lignes sphériques.

Le problème le plus général qui se pose à ce sujet peut être énoncé ainsi :

Étant donnée une figure de grandeur invariable, reconnaître si l'on peut la déplacer de telle manière que tous ses points restent sur des sphères fixes et, si le fait est possible, déterminer les conditions les plus générales dans lesquelles il a lieu.

Deux éventualités sont à considérer : ou bien chaque point de la figure mobile peut être amené en un point quelconque (aux imaginaires près) de la surface sphérique sur laquelle il reste constamment; ou bien il est astreint à décrire une certaine ligne tracée sur cette surface sphérique. Suivant le cas, on aura affaire à un déplacement à deux paramètres, ou à un seul.

Dans tous les cas chaque point de la figure mobile pourra être réuni par une tige de longueur invariable au centre de la sphère sur laquelle il reste constamment, et l'on sera ainsi amené à la connaissance d'un

([1]) Les travaux de ces deux éminents Géomètres sont exposés dans les Ouvrages suivants : Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 389 et suiv.; Kœnigs, *Traité de Cinématique;* Note III de M. Darboux, *Sur les mouvements algébriques.*

système articulé constitué de deux figures invariables, réunies point par point par des tiges rigides, et qui peut être déformé, malgré le nombre infini de ses liaisons.

La question posée se relie donc étroitement à la théorie des systèmes articulés, et c'est en cela que nous paraît résider son principal intérêt.

Remarquons enfin que la figure mobile peut être formée, soit de tous les points d'un solide, soit d'une surface, soit d'une ligne. On pourrait aussi examiner le cas où elle se compose d'un nombre fini de points invariablement liés ([1]).

Le travail de M. Ernest Duporcq, auquel nous avons fait allusion plus haut, est relatif au cas où la figure mobile est une droite : dans un très intéressant Mémoire paru récemment dans ce *Journal*, ce géomètre a examiné les conditions les plus générales dans lesquelles les points d'une droite qui se déplace restent tous sur des sphères fixes. Il a montré que les centres de ces sphères doivent appartenir à une cubique gauche. MM. Darboux et Mannheim avaient précédemment signalé les cas où la cubique gauche se réduit à une droite (M. Darboux) et à une conique (M. Mannheim).

Nous avons l'intention de revenir, dans une autre occasion, sur l'étude du problème général énoncé plus haut, étude qui n'est pas sans présenter des difficultés assez sérieuses. La question particulière que nous traiterons ici est la suivante :

Quel est le mode de déplacement le plus général d'un plan, tel que tous les points de ce plan décrivent des lignes appartenant à des sphères dont les centres sont sur un plan fixe?

Ce problème a deux solutions évidentes et qui ne présentent pas d'intérêt.

La première est donnée par la rotation d'un plan autour d'un point fixe, la seconde par la translation d'un plan dont tous les points restent sur des sphères égales.

Une troisième solution, de nature un peu moins intuitive, résulte des

---

([1]) M. Duporcq a récemment énoncé un théorème intéressant relatif à ce dernier cas (*Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 1405).

considérations suivantes : on sait qu'une droite L peut se déplacer de telle manière que tous ses points restent sur des sphères dont les centres sont en ligne droite; ce déplacement est à deux degrés de liberté, de sorte qu'on peut en compléter la définition en astreignant la droite L à une condition supplémentaire, à celle, par exemple, de faire un angle constant avec une direction fixe Δ.

Ayant ainsi défini le déplacement de la droite L, lions à cette droite un plan (P) qui reste constamment parallèle à Δ. On voit immédiatement que tous les points de (P) décrivent des lignes sphériques, qui se déduisent des lignes sphériques décrites par les points de L, au moyen de translations parallèles à Δ.

Nous dirons qu'un tel déplacement présente un cas de *demi-dégénérescence*, et nous en donnerons un exemple à la fin de ce travail.

Il n'est nullement certain, *a priori*, qu'à part ces trois solutions du problème, il existe d'autres modes de déplacement d'un plan qui satisfassent aux conditions énoncées.

Pour résoudre la question, nous supposerons qu'un tel déplacement existe réellement, et nous déterminerons les conditions, de plus en plus précises, auxquelles doivent satisfaire les éléments du système constitué par le plan fixe et par le plan mobile.

II.

Soient (P) le plan fixe et (P′) le plan mobile. Si le déplacement cherché est possible, tout point m' du plan (P′) reste à distance invariable d'un point m du plan (P).

Il existe donc, entre les points du plan (P′) et ceux du plan (P), une correspondance au sujet de laquelle on peut faire diverses hypothèses :

1° A un point m' du plan (P′) correspond un point *unique* m du plan (P), sauf peut-être pour un nombre fini de positions du point m', et réciproquement :

2° A un point m' correspond plus d'un point m, et réciproquement ;

3° Enfin à un point m' correspond un point unique m, mais la réciproque n'a pas lieu.

On va voir que les deux dernières hypothèses sont inadmissibles. Observons d'abord que, si au point m' correspondent deux points m_1 et m_2 du plan (P), tels que les distance $m'm_1$, $m'm_2$ soient invariables, m' décrit une circonférence dont l'axe est m_1m_2.

Dans la deuxième hypothèse, un point quelconque du plan (P′) décrit une circonférence dont l'axe est une droite du plan (P).

Dans la troisième hypothèse, considérons le déplacement inverse du déplacement étudié; alors le plan (P′) reste fixe et le plan (P) se déplace de manière qu'une infinité de ses points décrivent des circonférences dont les axes appartiennent au plan (P′).

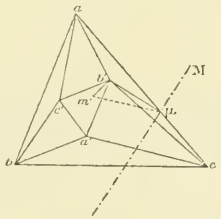
Ces points peuvent d'ailleurs occuper le plan (P) tout entier, ou être répartis sur une certaine courbe de ce plan. En tout cas, ils ne sont pas en ligne droite, car le déplacement direct du plan (P) se réduirait à une rotation autour de cette droite, solution évidente que nous avons écartée.

En résumé, si l'une des deuxième et troisième hypothèses était vraie, un plan pourrait se déplacer de telle manière qu'une infinité de ses points, non en ligne droite, décriraient des circonférences dont les axes appartiendraient à un plan fixe.

Or, cela est impossible.

Soient, en effet, a', b', c' trois points non en ligne droite d'un plan mobile (P′), qui décrivent des circonférences dont les axes sont les côtés du triangle fixe abc, situé dans le plan (P) (*fig.* 1).

Fig. 1.



Les diverses droites tracées sur la figure sont de longueurs invariables, et l'on a en $abca'b'c'$ un octaèdre qui se déforme sans altération de ses arêtes. (Nous avons déterminé, dans un précédent

travail [1], les conditions auxquelles peut avoir lieu cette déformation, impossible en général.)

Supposons maintenant que le point m', appartenant au plan (P′), décrive une circonférence dont l'axe M est une droite de (P). Soit μ le point où M rencontre ca. La distance $m'\mu$ est invariable et il en est de même des angles $a'b'm'$, $m'b'\mu$, $\mu b'c'$.

On a alors en $b'.ca'm'\mu$, $b'.ca'c'a$, *deux angles tétraèdres à faces de grandeurs invariables*, qui se déforment en ayant constamment en commun deux dièdres adjacents, à savoir $b'c$ et $b'a'$. Or nous avons démontré [2] qu'une telle déformation est impossible, si les faces des deux angles tétraèdres ne sont pas égales deux à deux. Le point m' appartient donc à la droite $b'c'$, et l'on voit tout de suite qu'il doit se confondre avec le point b'.

Nous avons supposé que le point μ était distinct des points a et c. Dans le cas contraire, on verrait que le point m' se confond nécessairement avec a' ou avec c'.

Ainsi, dans un plan mobile, il y a *trois* points au plus qui décrivent des circonférences dont les axes appartiennent à un plan fixe. Il faut donc rejeter la deuxième et la troisième hypothèses sur la nature de la correspondance qui existe entre les points m et les points m', et adopter la première : cette correspondance est uniforme (sauf peut-être pour un nombre limité de points), et, comme elle est algébrique, elle résulte d'une transformation *birationnelle* de plan à plan, ou transformation de *Cremona*, que nous désignerons par T.

III.

Voilà un premier résultat acquis, mais il est encore d'un caractère trop général. Pour le préciser davantage, nous nous appuierons sur l'important théorème suivant, dû à M. Mannheim [3] :

Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897.

(2) *Loc. cit.*

(3) *Principes et développements*, etc., p. 180.

fixes dont les centres sont dans un même plan, un point quelconque de la droite décrit une ligne qui appartient à une sphère dont le centre est aussi sur ce plan. Les centres des sphères qui contiennent les lignes ainsi décrites appartiennent à une conique.

D'après ce théorème, aux points du plan (P′), qui appartiennent à une droite, correspondent les points du plan (P), qui appartiennent à une conique. *La transformation* T *fait donc correspondre à toute droite du plan* (P′) *une conique du plan* (P). De même, à toute droite du plan (P) elle fait correspondre une conique du plan (P′). On reconnaît là les caractères de la *transformation quadratique*, dont je vais rappeler les propriétés bien connues [1].

Toutes les coniques du plan (P′), qui sont les transformées des droites du plan (P), passent par trois points fixes a', b', c', qui sont distincts en général. De même, toutes les coniques du plan (P), qui sont les transformées des droites du plan (P′), passent par les points fixes a, b, c.

Si l'on prend pour triangles de référence, respectivement dans le plan (P) et dans le plan (P′), les triangles abc et $a'b'c'$, les coordonnées normales de deux points homologues $m(x, y, z)$ et $m'(x', y', z')$ sont reliées par les relations

$$Axx' = Byy' = Czz',$$

où A, B, C sont des constantes.

Un point du plan (P) admet, en général, pour homologue un point unique du plan (P′). Il n'y a d'exception que pour les points a, b, c, auxquels correspondent respectivement tous les points des droites $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. De même, aux points a', b', c' correspondent, respectivement, tous les points des droites bc, ca, ab.

Enfin la conique du plan (P′), qui est la transformée d'une droite du plan (P), se décompose quand cette dernière passe par l'un des sommets du triangle abc. Ainsi une droite D, passant par le point a, se transforme en deux droites dont l'une, $b'c'$, correspond tout entière au point a, et dont l'autre, qui passe par le point a', correspond point par point à D.

---

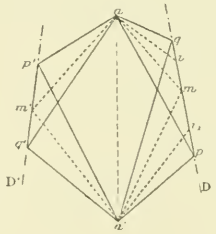
[1] V. Salmon, *Higher plane Curves*. Ch. VIII.

Les points a, b, c, avons-nous dit, sont distincts, en général. Il peut cependant arriver que deux d'entre eux, ou même tous les trois, soient confondus. Dans tous les cas, il existe, dans le plan (P), *au moins* un point a (trois au plus) auquel correspondent tous les points d'une droite située dans le plan (P′), et toute droite issue du point a a pour transformée une droite du plan (P′) qui passe par un point fixe a'. Ce point a' joue, dans le plan (P′), le même rôle que le point a joue dans le plan (P).

IV.

Appliquons ces considérations au déplacement qui fait l'objet de cette étude : marquons dans le plan (P) et dans le plan (P′) le point a et le point a', puis traçons la droite D′ qui correspond tout entière au point a et la droite D qui correspond au point a' (*fig.* 2).

Fig. 2.



Soient enfin ap et aq deux droites quelconques issues du point a, $a'p'$ et $a'q'$ les droites correspondantes du plan (P′).

Tous les points de la droite $p'q'$ restent à des distances invariables du point a; par suite, ap' et aq' sont des droites de longueurs constantes. Il en est de même des droites $a'p$ et $a'q$.

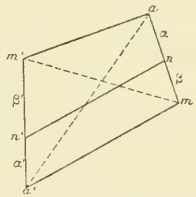
On a donc en apq, $a'pq$, $a'p'q'$, $ap'q'$ un système de quatre triangles de grandeurs invariables, articulés aux points a, a', et suivant les droites pq, $p'q'$. Ce système doit se déformer dans les conditions suivantes : si am est une droite quelconque, menée par le point a

dans le plan abc, et liée à ce plan, il existe une droite $a'm'$, menée par le point a' dans le plan $a'b'c'$ et liée à ce plan, telle que, pendant la déformation, un point quelconque de am reste à distance invariable d'un certain point de $a'm'$.

Je transformerai encore cette condition en faisant intervenir une propriété élémentaire du *quadrilatère gauche articulé*.

Soit (*fig.* 3) $ama'm'$ un tel quadrilatère. S'il se déforme de telle manière que deux points, n et n' appartenant respectivement aux

Fig. 3.



côtés opposés am, $a'm'$, restent à distance invariable l'un de l'autre, *il existe une relation linéaire entre les carrés des diagonales aa' et nm'.*

Posons en effet

$$an = \alpha, \qquad nm = \beta, \qquad m'n' = \beta', \qquad n'a' = \alpha',$$

on a, d'après une propriété bien connue (théorème de Stewart),

$$\overline{nn'}^2 = \frac{\alpha'\overline{nm'}^2 + \beta'\overline{na'}^2}{\alpha' + \beta'} + k_1,$$

puis

$$\overline{nm'}^2 = \frac{\alpha\overline{mm'}^2 + \beta\overline{m'a}^2}{\alpha + \beta} + k_2 = \frac{\alpha\overline{mm'}^2}{\alpha + \beta} + k_3,$$

$$\overline{na'}^2 = \frac{\beta\overline{aa'}^2}{\alpha + \beta} + k_4,$$

en désignant par k_1, k_2, k_3, k_4 des quantités constantes. En remplaçant, dans l'expression de $\overline{nn'}^2$, $\overline{nm'}^2$ et $\overline{na'}^2$ par leurs valeurs, il

vient

$$(1) \qquad \overline{nn'}^2 = \frac{\alpha\alpha'\overline{mm'}^2 + \beta\beta'\overline{aa'}^2}{(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')} + k,$$

d'où une relation de la forme

$$(2) \qquad A\overline{mm'}^2 + B\overline{aa'}^2 + C = 0.$$

Réciproquement, si le quadrilatère se déforme de manière que la relation (2) soit satisfaite, un point quelconque de am reste à distance invariable d'un certain point de $a'm'$. En effet, on peut identifier (1) et (2) en se donnant arbitrairement le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ce théorème se rattache à la théorie de l'*hyperboloïde articulé* de M. Greenhill, théorie qui a fait, comme on le sait, l'objet d'études approfondies. Je me contente d'indiquer ce point, étranger à la question traitée ici.

Revenons à la *fig.* 2. Le quadrilatère $ama'm'$ se déforme, avons-nous dit, de manière qu'un point quelconque de am reste à distance constante d'un certain point de $a'm'$: on a donc, d'après ce qui précède, une relation linéaire entre les carrés des longueurs $\overline{aa'}^2$ et $\overline{mm'}^2$.

On en conclut donc ceci : *le système des quatre triangles apq, $a'pq$, $a'p'q'$, $ap'q'$, doit pouvoir se déformer de manière que, m étant un point quelconque de pq, il existe sur $p'q'$ un point correspondant m' tel que l'on ait une relation linéaire entre $\overline{aa'}^2$ et $\overline{mm'}^2$.*

V.

Nous supposerons d'abord que les éléments de la *fig.* 2 sont tous de *grandeurs finies*.

Des conditions auxquelles doit satisfaire notre système de quatre triangles, conservons seulement celle-ci : on doit avoir une relation linéaire entre $\overline{pp'}^2$ et $\overline{aa'}^2$.

La déformation est alors possible et dépend d'un seul paramètre arbitraire.

En effet, donnons-nous la longueur $aa' = x$, ce qui fait connaître la longueur pp'. On peut construire successivement les trois tétraèdres $aa'pq$, $aa'pp'$, $aa'p'q'$, dont toutes les arêtes sont connues.

La construction de chaque tétraèdre est possible de *deux* manières, qui diffèrent par l'orientation; de la sorte, à une valeur de x correspondent *huit* déterminations du système (qui, naturellement, sont deux à deux symétriques). Ces déterminations dépendent donc d'une équation du huitième degré, dont les coefficients sont fonctions de x.

Pour l'une au moins de ces déterminations, il faut, d'après la forme donnée à l'énoncé du problème, que $\overline{mm'}^2$ soit une fonction linéaire de x^2 à coefficients constants, m et m' étant deux points correspondants quelconques de pq et $p'q'$.

On pressent que toutes les déterminations ne peuvent satisfaire à cette condition, et que, par suite, l'équation du huitième degré dont il est parlé plus haut doit se décomposer. Mais il faut donner à cette idée une forme plus nette. Nous y parviendrons à l'aide des considérations suivantes :

1° *En aucun cas, la détermination du tétraèdre $aa'pq$ ne peut être rationnelle en x.*

La démonstration même de cet énoncé en précisera le sens : nous connaissons toutes les arêtes du tétraèdre $aa'pq$; l'une d'entre elles, aa', est égale à x. Pour le construire, fixons la face apq. Le point a' se trouve alors sur une circonférence dont l'axe est pq, et la position du point a' sur cette circonférence correspond uniformément, comme on sait, *à la tangente de la moitié du dièdre pq*. Pour que le tétraèdre fût déterminé rationnellement en fonction de x, il faudrait que cette tangente fût une fonction rationnelle de x.

Or il est aisé de voir que cela est impossible; abaissons en effet sur pq les perpendiculaires ai et $a'i_1$, désignons par h, h_1, k les longueurs connues ai, $a'i_1$, ii_1 et soit enfin ζ le dièdre pq. On a

$$x^2 = k^2 + h^2 + h_1^2 - 2hh_1 \cos\zeta.$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{1 - \tang^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \tang^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{k^2 + h^2 + h_1^2 - x^2}{2hh_1};$$

on tire de là

$$\tang^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2 - k^2 - (h - h_1)^2}{-x^2 + k^2 + (h + h_1)^2}.$$

Il faudrait que le second membre fût le carré d'une fonction rationnelle en x, ce qui exigerait

$$k^2 + (h - h_1)^2 = k^2 + (h + h_1)^2,$$

d'où

$$hh_1 = 0.$$

ce qui n'a pas lieu [1].

2° Étudions à présent la détermination du tétraèdre $aa'pp'$. La question est analogue à la précédente; la différence se trouve dans le fait qu'il y a maintenant deux arêtes variables, $aa' = x$ et pp', reliées à la première par une relation de la forme

$$\overline{pp'}^2 = l\overline{aa'}^2 + m.$$

On peut faire sur cette détermination deux hypothèses :

1° Ou bien elle est rationnelle en x; il n'est pas difficile de montrer que ce fait est impossible, par un raisonnement analogue au précédent, bien qu'un peu plus long. Mais cela n'est pas utile, comme on le verra par la suite;

2° Ou bien elle est irrationnelle en x; on peut alors se demander si cette détermination ne dépendrait pas, pour un choix convenable des éléments de la figure, d'un radical identique à celui dont dépend la détermination du tétraèdre $aa'pq$; il y aurait *correspondance uniforme* entre les deux tétraèdres, et le premier étant choisi, le second serait déterminé sans ambiguïté.

---

[1] Pour abréger une étude déjà longue, j'admets ici, sans démonstration, un résultat que le lecteur pourra établir sans peine, à l'aide de raisonnements tout à fait analogues à ceux employés dans le texte.

Posons

$$ap = p, \quad aq = q, \quad a'p = p_1, \quad a'q = q_1, \quad ap' = p_1, \quad a'p' = p'.$$

Soient aussi φ et ψ les dièdres en aa' des tétraèdres $aa'pq$ et $aa'pp'$.

La formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, appliquée à l'angle trièdre en a du tétraèdre $aa'pq$, donne

$$\cos\widehat{paq} = \cos\widehat{paa'}\cos\widehat{qaa'} + \sin\widehat{paa'}\sin\widehat{qaa'}\cos\varphi.$$

Les termes $\cos\widehat{paq}$, $\cos\widehat{paa'}$, $\cos\widehat{qaa'}$ sont ou bien des constantes, ou bien des fonctions rationnelles de x. On a, par exemple,

$$\cos\widehat{paa'} = \frac{x^2 + p^2 - p_1^2}{2px}.$$

On voit ainsi que $\cos\varphi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sin\widehat{paa'}\sin\widehat{qaa'}.$$

Mais on a

$$\sin\widehat{paa'} = \frac{1}{2px}\sqrt{(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)},$$

et de même

$$\sin\widehat{qaa'} = \frac{1}{2qx}\sqrt{(x+q+q_1)(x+q-q_1)(x+q_1-q)(q+q_1-x)}.$$

Donc $\cos\varphi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)\\(x+q+q_1)(x+q-q_1)(x+q_1-q)(q+q_1-x)\end{array}\right\}}.$$

On voit de même que $\cos\psi$ est le quotient d'une fonction ration-

nelle de x par l'expression

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)\\(x+p'+p'_1)(x+p'-p'_1)(x+p'_1-p')(p'+p'_1-x)\end{array}\right\}}.$$

Si $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ et $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$ dépendaient du même radical, il en serait de même *a fortiori* de $\cos\varphi$ et $\cos\psi$, et les deux radicaux écrits ci-dessus devraient être identiques. Il faudrait pour cela que les quantités

$$q+q_1,\quad q-q_1,\quad q_1-q$$

fussent égales, à l'ordre près, aux quantités

$$p'+p'_1,\quad p'-p'_1,\quad p'_1-p'.$$

Remarquons à présent que les points p et q sont deux points *quelconques* de la droite D; ayant placé arbitrairement le point p, on peut supposer le point q choisi de manière que les égalités en question n'aient pas lieu. En effet, s'il en était autrement, le point q pourrait se déplacer sur la droite D, de manière qu'on ait

$$q+q_1=\text{const.},\qquad q-q_1=\text{const.},$$

d'où

$$q=\text{const.},\qquad q_1=\text{const.},$$

ce qui est absurde.

Nous pouvons donc conclure qu'*il n'existe pas de correspondance uniforme entre les tétraèdres $aa'pq$ et $aa'pp'$.*

D'après cela, si l'on construit, pour une valeur donnée de x, le tétraèdre $aa'pp'$, les deux positions que peut occuper le point q sont *algébriquement inséparables*. Il en est de même des deux positions que peut occuper le point q'. Si l'on désigne alors par q_1 et q_2 les deux positions du point q, par q'_1 et q'_2 les deux positions du point q', *toute propriété du système* (q_1, q'_1) *appartient aussi au système* (q_2, q'_2).

D'une façon plus précise, on peut former une équation du second

degré

$$(1) \qquad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

aux racines de laquelle, λ_1 et λ_2, correspondent uniformément les deux positions du point q, quand on a construit le tétraèdre $aa'pp'$ (λ désigne, par exemple, $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$). De même, les deux positions du point q correspondent uniformément aux racines λ'_1 et λ'_2 de l'équation

$$(2) \qquad A'\lambda'^2 + B'\lambda' + C' = 0.$$

Les coefficients A, B, C, A', B', C' des équations (1) et (2) sont des fonctions rationnelles de x et de $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$, ou bien, en employant le langage de la Théorie des équations, appartiennent *au domaine de rationalité* $\left(x, \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)$. D'après ce qu'on vient de dire, ces deux équations sont irréductibles dans ce domaine.

Supposons alors qu'une certaine propriété des points q_1 et q'_1 s'exprime par une relation, rendue rationnelle, entre les racines λ_1 et λ'_1

$$(3) \qquad \varphi(\lambda_1, \lambda'_1) = 0,$$

et dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité précédemment défini. Les équations (2) et (3) ont une racine commune λ'_1; il s'ensuit que leur résultant est nul, et l'on a

$$\psi(\lambda_1) = 0,$$

les coefficients de ψ appartenant toujours au même domaine de rationalité. L'équation précédente, satisfaite par une racine de l'équation (1), irréductible dans ce domaine, doit être satisfaite aussi par la seconde racine λ_2 de la même équation. On a donc

$$\psi(\lambda_2) = 0,$$

et l'équation

$$\varphi(\lambda_2, \lambda') = 0$$

a une racine commune avec l'équation (2). Si cette racine est λ_2, on a

$$\varphi(\lambda_2, \lambda'_2) = 0,$$

et, par suite, la propriété qu'on a supposée appartenir au système (q_1, q') appartient aussi au système (q_2, q'_2). Si la racine commune est λ'_1, on a

$$\varphi(\lambda_2, \lambda'_1) = 0,$$

l'équation (1) et l'équation

$$\varphi(\lambda, \lambda'_1) = 0$$

ont deux racines communes. En répétant le même raisonnement, on verra que ces deux racines appartiennent aussi à l'équation

$$\varphi(\lambda, \lambda'_2) = 0.$$

Dans ce dernier cas, la même propriété appartient aux *quatre* couples de points

$$(q_1, q'_1), \quad (q_2, q'_1), \quad (q_1, q'_2), \quad (q_2, q'_2).$$

Quoi qu'il arrive, la proposition énoncée plus haut se trouve établie.

Revenons alors au système des quatre triangles. D'après les conditions dans lesquelles ce système doit se déformer, $\overline{qq'}^2$ doit être une fonction linéaire de x^2, à coefficients constants, q et q' étant convenablement choisis parmi les positions que ces points peuvent occuper. Il résulte des développements précédents que, si l'on a

$$\overline{q_1 q'_1}^2 = lx^2 + m,$$

on a aussi

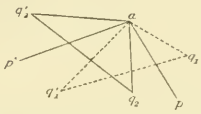
$$\overline{q_2 q'_2}^2 = lx^2 + m,$$

et, par suite,

$$q_1 q'_1 = q_2 q'_2.$$

Ceci nous conduit à un résultat d'un énoncé fort simple : Projetons le système sur un plan perpendiculaire à la droite aa' (*fig.* 4). Les plans $aa'p$, $aa'p'$ ont pour projections deux droites ap, ap'. Les

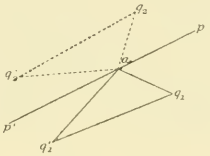
Fig. 4.



points q_1 et q_2 se projettent en deux points symétriques par rapport à ap, et les points q'_1 et q'_2, en deux points symétriques par rapport à ap'. Les droites $q_1q'_1$ et $q_2q'_2$ sont égales dans l'espace et font le même angle avec le plan de projection. Elles sont donc égales aussi en projection.

On a, par suite, en $q_1aq'_1$, $q_2aq'_2$ deux triangles égaux. Si ces deux triangles étaient inversement orientés (*fig.* 5), on voit sans peine

Fig. 5.



que les points p, a, p' seraient en ligne droite, et le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'pp'$ serait constamment égal à 0 ou à π, ce qui est inadmissible. Il faut donc que ces deux triangles soient orientés de même, comme sur la *fig.* 4. On alors

$$\widehat{q_1aq'_1} = \widehat{q_2aq'_2},$$

d'où

$$\widehat{q_1aq_2} = \widehat{q'_1aq'_2}$$

et

$$\widehat{q_1ap} = \widehat{q'_1ap'}.$$

ce qui s'exprime ainsi : *pendant la déformation, les dièdres en aa des tétraèdres aa'pq, aa'p'q' sont constamment égaux.*

Il faut ajouter qu'une rotation du même sens doit amener le plan apa' sur le plan aqa', et le plan $ap'a'$ sur le plan $aq'a'$.

Le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'pq$ est celui que nous avons déjà désigné par φ. On a vu que $\cos\varphi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)\\(x+q+q_1)(x+q-q_1)(x+q_1-q)(q+q_1-x)\end{array}\right\}}.$$

De même, en appelant ψ le dièdre en aa du tétraèdre $aa'p'q$, $\cos\psi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x+p+p'_1)(x+p-p'_1)(x+p'_1-p')(p+p'_1-x)\\(x+q'+q'_1)(x+q'-q'_1)(x+q'_1-q')(q'+q'_1-x)\end{array}\right\}}.$$

Appelons Q et R les deux polynomes du huitième degré qui figurent sous les radicaux précédents. On peut supposer qu'aucun d'eux ne contient de facteur qui soit carré parfait, car cela entraînerait entre les p et q, ou entre les p' et q' des relations que l'on peut supposer n'être pas satisfaites, puisque, nous le répétons, le choix des points p et q sur la droite D est arbitraire.

Cela posé, l'égalité

$$\cos\varphi = \cos\psi$$

entraîne la suivante

$$\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{Q}} = \text{fonction rationnelle de } x,$$

d'où l'on tire aisément

$$\begin{aligned} QR &= \text{carré d'une fonction rationnelle de } x,\\ &= \text{carré d'un polynome en } x. \end{aligned}$$

Comme Q et R n'ont pas de facteurs carrés parfaits, il faut que ces

deux polynomes soient identiques. En écrivant que leurs facteurs linéaires sont égaux deux à deux, on voit que les quantités

$$p + p_1, \quad p - p_1, \quad q + q_1, \quad q - q_1$$

et

$$p' + p'_1, \quad \pm(p' - p'_1), \quad q' + q'_1, \quad \pm(q' - q'_1)$$

forment, à l'ordre près, deux suites identiques.

Toujours à cause du choix arbitraire des points p et q, on ne doit pas écrire d'égalité où figurent à la fois des p et des q. Il faut aussi remarquer que les quantités p et q étant essentiellement positives, $p + p_1$ est toujours supérieur à la valeur absolue de $p - p_1$, etc. Il résulte de ces deux considérations que les seuls systèmes possibles d'égalités sont les suivants :

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p + p_1 = p' + p'_1, & q + q_1 = q' + q'_1, \\ p - p_1 = p' - p'_1, & q - q_1 = q' - q'_1, \\ \text{d'où} & \\ p = p', \quad p_1 = p'_1, & q = q', \quad q_1 = q'_1; \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p + p_1 = p' + p'_1, & q + q_1 = q' + q'_1, \\ p - p_1 = p'_1 - p', & q - q_1 = q'_1 - q', \\ \text{d'où} & \\ p = p'_1, \quad p_1 = p', & q = q'_1, \quad q_1 = q'; \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{III}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p + p_1 = p' + p'_1, & q + q_1 = q' + q'_1, \\ p - p_1 = p' - p'_1, & q - q_1 = q'_1 - q', \\ \text{d'où} & \\ p = p', \quad p_1 = p'_1, & q = q'_1, \quad q_1 = q'; \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{IV}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p + p_1 = p' + p'_1, & q + q_1 = q' + q'_1, \\ p - p_1 = p'_1 - p', & q - q_1 = q'_1 - q', \\ \text{d'où} & \\ p = p'_1, \quad p_1 = p', & q = q', \quad q_1 = q_1. \end{array} \right.$$

On peut se dispenser d'examiner les systèmes (III) et (IV).

En effet, lorsque le point q vient à se confondre avec le point p, le point q' doit, en même temps, se confondre avec le point q.

En d'autres termes, les égalités

$$q = p, \qquad q_1 = p_1$$

entraînent les suivantes :

$$q = p', \qquad q_1 = p_1'.$$

D'après cela, le système (III) ou le système (IV) ne peuvent être satisfaits que si l'on a

$$p = p_1 = p' = p_1',$$
$$q = q_1 = q' = q_1',$$

et les quantités satisfaisant à ces égalités satisfont à chacun des systèmes (I) et (II). Il n'y a donc lieu de retenir que ces deux-là et nous allons les examiner successivement.

VI.

Commençons par étudier le système des égalités (I).

Les quatre triangles sont représentés de nouveau (*fig.* 6). On a

$$ap = a'p = p, \qquad aq = a'q = q,$$
$$a_1p_1 = a_1'p_1 = p_1, \qquad a_1q_1 = a_1'q_1 = q_1.$$

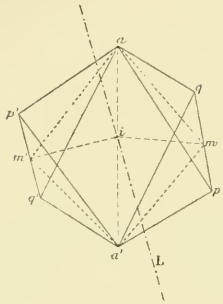
Comme les dièdres en aa' des deux tétraèdres $aa'pq$, $aa_1p_1q_1$ doivent être égaux, on voit immédiatement que ces deux tétraèdres eux-mêmes sont égaux : le second résulte de la rotation du premier autour de aa' d'un certain angle φ.

A chaque système de valeurs des paramètres φ et $aa' = x$ correspond une position de la figure formée par les quatre triangles.

Faisons maintenant intervenir la condition à laquelle doit satisfaire le système articulé : il faut que, m, m' étant deux points correspon-

dants quelconques de pq et de $p'q'$, la déformation soit telle que l'on ait une relation linéaire entre $\overline{mm'}^2$ et $\overline{aa'}^2$.

Fig. 6.



Nous devons rechercher s'il est possible d'établir, entre x et φ, une relation telle que cette condition soit remplie.

Il est clair, tout d'abord, que les points m et m' sont homologues sur les deux tétraèdres égaux $aa'pq$, $aa'p'q'$: en effet, les dièdres en aa' des tétraèdres $aa'pm$, $aa'p'm'$ doivent être égaux. On a donc

$$am = am' = m, \qquad a'm = a'm' = m_1.$$

En outre, le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'mm'$ est égal à φ.

Calculons $\overline{mm'}^2$. Abaissons à cet effet sur aa' les perpendiculaires mi, $m'i$. L'angle $\widehat{mim'}$ est égal à φ et l'on a

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mi}^2 + \overline{m'i}^2 - 2mi.m'i\cos\varphi = 2\overline{mi}^2(1 - \cos\varphi).$$

Le triangle ama' fournit de plus l'égalité

$$\overline{mi}^2 = \frac{(x + m + m_1)(x + m - m_1)(x + m_1 - m)(m + m_1 - x)}{4x^2}$$
$$= \frac{-x^4 + 2(m^2 + m_1^2)x^2 - (m^2 - m_1^2)^2}{4x^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de $\overline{mm'}^2$, et égalant à une fonction linéaire de x^2, on trouve la relation qui doit exister entre x et φ :

$$(4)\qquad \frac{-x^4+2(m^2-m_1^2)^2x^2-(m^2-m_1^2)^2}{2x^2}(1-\cos\varphi)=Ax^2+B.$$

Soient n et n' deux autres points correspondants; ils donnent lieu à la relation analogue

$$(5)\qquad \frac{-x^4+2(n^2+n_1^2)^2x^2-(n^2-n_1^2)^2}{2x^2}(1-\cos\varphi)=Cx^2+D.$$

Il faut, pour que la déformation soit possible, que les relations (4) et (5) définissent le même angle φ en fonction de x. Cela exige que l'on ait *identiquement*

$$(6)\qquad \frac{-x^4+2(m^2+m_1^2)^2x^2-(m^2-m_1^2)^2}{-x^4+2(n^2+n_1^2)^2x^2-(n^2-n_1^2)^2}=\frac{Ax^2+B}{Cx^2+D}.$$

Une telle identité ne peut avoir lieu que si les polynomes bicarrés qui figurent au premier membre ont un facteur commun du second degré. En comparant leurs facteurs, et en tenant compte de l'indépendance des points m et n, on voit que ce fait se présente au seul cas où l'on a

$$m=m_1,\qquad n=n_1.$$

On a alors aussi

$$p=p_1,\qquad q=q_1.$$

Les quatre triangles de la fig. 6 sont égaux.

Faisons $m=m_1$, $n=n_1$ dans l'égalité (6), et identifions. Il vient

$$A=k,\qquad B=-2k(m^2+m_1^2),$$

k étant une constante indépendante de la position du point m.

La relation (4) devient alors

$$\frac{x^2+2(m^2+m_1^2)}{2}(1-\cos\varphi)=k[x^2-2(m^2+m_1^2)],$$

ou

$$\cos\varphi = 1 + 2k.$$

Ainsi l'angle φ est de grandeur constante.

Réciproquement, supposons que les quatre triangles de la *fig.* 6 soient égaux ($ap = ap' = a'p = a'p'$, $aq = aq' = a'q = a'q'$), que la figure formée par les triangles apq, $a'pq$ soit superposable à celle formée par les deux autres, et qu'enfin le système se déforme de telle manière que les plans $aa'p$, $aa'p'$ fassent entre eux un angle constant φ; dans ces conditions, *un point quelconque du plan de l'un des triangles reste à distance invariable d'un point convenablement déterminé sur le plan du triangle opposé.*

Soit en effet m un point quelconque de la droite pq, et m' le point de la droite $p'q'$ tel que $mp = m'p'$. La figure $ama'm'$ constitue un quadrilatère gauche articulé dont les côtés ont même longueur m. Si l'on désigne par i le milieu de aa', les droites mi, $m'i$ sont perpendiculaires à aa', et l'angle en i du triangle mim' est égal à φ.

On a donc

$$\overline{mm'}^2 = 2\overline{mi}^2(1 - \cos\varphi) = 2\left(m^2 - \frac{\overline{aa'}^2}{4}\right)(1 - \cos\varphi),$$

ou

$$\overline{mm'}^2 + \frac{1 - \cos\varphi}{2}\overline{aa'}^2 = 2(1 - \cos\varphi)m^2.$$

Il existe donc une relation linéaire entre $\overline{mm'}^2$ et $\overline{aa'}^2$, diagonales du quadrilatère $ama'm'$; d'après le lemme utilisé plusieurs fois, on en conclut que *tout point de am reste à distance invariable d'un point convenablement choisi sur $a'm'$, et réciproquement.* Comme enfin le point m est pris arbitrairement sur pq, la proposition se trouve établie.

Si l'on fixe le triangle apq, on peut donner une nouvelle définition du déplacement du triangle $a'p'q'$.

Nous pouvons d'abord supposer que les points p et q sont choisis de telle manière que l'on ait $ap = aq$. Joignons alors le point i au point de rencontre des droites pq, $p'q'$, et soit L la droite obtenue. On reconnaît immédiatement les propriétés suivantes :

1° Les points a, p, q sont respectivement symétriques des points a',

p', q' par rapport à la droite L. En d'autres termes, le triangle $a\,q'\,p'$ se déplace de manière à rester constamment symétrique du triangle apq par rapport à la droite L, de sorte que, pour définir le déplacement du premier triangle, il suffit de définir le déplacement de L.

2° m étant le milieu de pq, le plan am est perpendiculaire au plan apq et le point i décrit dans ce plan une circonférence décrite sur am comme diamètre;

3° Enfin la droite L rencontre pq et fait avec cette droite un angle moitié de l'angle $(pq, p'q')$; mais ce dernier angle, égal au supplément de l'angle φ, est constant.

On peut donc définir ainsi qu'il suit le déplacement de la droite L et celui du triangle $a'p'q'$.

Soient apq un triangle fixe, m la projection du point a sur le côté pq, C un cercle décrit sur am comme diamètre, dans un plan perpendiculaire au plan apq. Une droite L *se déplace en s'appuyant sur le cercle* C *et sur la droite pq, que de plus elle rencontre sous un angle constant.*

Si, pour chaque position de L, *on construit le triangle $a'q'p'$, symétrique du triangle apq par rapport à cette droite, ce triangle $a'q'p'$ se déplace de telle manière que tous les points de son plan décrivent des lignes sphériques dont les centres appartiennent au plan apq.*

Nous retrouverons plus loin ce déplacement par une méthode qui permettra de donner à son sujet quelques détails complémentaires. Indiquons cependant tout de suite comment on peut le réaliser au moyen d'un modèle facile à construire.

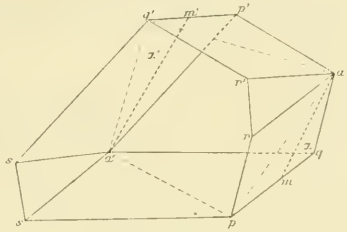
Reportons (*fig.* 7) les triangles de la *fig.* 6 et construisons les parallélogrammes $aqpr$, $ap'q'r'$, $a'qps$, $a'p'q's'$.

Les angles rar', sas', égaux tous deux à l'angle des droites pq, $p'q'$, sont constants pour cette raison, et, par suite, les triangles rar', $sa's'$ sont invariables.

On peut donc construire ces triangles, ainsi que les quatre parallélogrammes désignés ci-dessus, en les découpant dans du carton. On assemblera ensuite ces six polygones au moyen de charnières de papier

gommé et le système articulé, constitué de cette manière, jouit de cette propriété que, pendant sa déformation, les points du plan $aqpr$ restent tous à des distances constantes de points de la face $a'p'q's'$.

Fig. 7.



qui leur correspondent un à un. On met le fait en évidence en reliant les points correspondants par des fils qui restent tendus pendant la déformation.

Voici maintenant comment on déterminera les points correspondants. Soit α un point du plan $aqpr$, dont on veut déterminer le correspondant α' dans le plan $a'p'q's'$. Menons la droite $a\alpha$ qui rencontre en m la droite pq. En prenant sur $p'q'$ la longueur $p'm = pm$, le point α' se trouve sur la droite $a'm'$, et sa position sur cette droite est déterminée par la relation

$$\frac{m'\alpha' . m\alpha}{a'\alpha' . a\alpha} = \frac{1 + \cos\psi}{2},$$

ψ désignant l'angle car', c'est-à-dire le supplément de l'angle que nous avons précédemment désigné par φ. On tire de là

$$a'\alpha' = \frac{ma . m\alpha}{ma - a\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2}},$$

relation qui permet de déterminer facilement le point a'.

VII.

Nous passons à l'examen du système d'égalités (II) de la fin du § V.

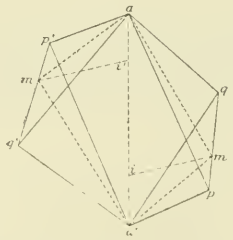
Construisons (*fig.* 8) le système des quatre triangles articulés, de manière à satisfaire aux relations

$$ap = a'p = p, \qquad ap' = a'p = p_1,$$
$$aq = a'q' = q, \qquad aq = a'q = q_1.$$

Cette fois les deux tétraèdres $aa'pq$ et $aa'p'q'$ sont, non plus égaux, mais symétriques.

Si m et m' sont deux points correspondants appartenant respectivement à pq et $p'q'$, on a $pm = p'm'$. Les plans ama' et $am'a'$ forment

Fig. 8.



entre eux le même angle φ, quel que soit le point m, et la détermination du système dépend des deux variables φ et $aa' = x$.

Il faut encore rechercher si l'on peut trouver entre φ et x une relation telle que $\overline{mm'}^2$ soit une fonction linéaire de x^2, quel que soit le point m.

Abaissons des points m et m' les perpendiculaires mi et $m'i'$ sur aa'. On a

$$\overline{mm'}^2 = 2\overline{mi}^2(1 - \cos\varphi) + \overline{ii'}^2.$$

D'ailleurs, en posant $am = a'm' = m$, $a'm = am' = m'$,

$$\overline{mi}^2 = \frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(-x+m+m_1)}{4x^2}$$

et

$$ii' = ai - ia' = \frac{\overline{ai}^2 - \overline{ia'}^2}{aa'} = \frac{m'^2 - m^2}{x}.$$

On a donc, en égalant $\overline{mm'}^2$ à une fonction linéaire de x^2,

$$(7)\quad \frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(-x+m+m_1)}{2x^2}(1-\cos\varphi) + \frac{(m'^2-m^2)^2}{x^2} = Ax^2 + B.$$

En éliminant $\cos\varphi$ entre cette relation et la relation analogue qui fournit un second point n, il vient

$$\frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(-x+m+m_1)}{(x+n+n_1)(x+n-n_1)(x+n_1-n)(-x+n+n_1)} = \frac{Ax^4 + Bx^2 - (m'^2-m^2)^2}{A'x^4 + B'x^2 - (n'^2-n^2)^2}.$$

Si l'on n'a pas, quels que soient m et n, les égalités $m = m_1$, $n = n_1$, on peut supposer ces points choisis de telle manière que les polynomes bicarrés figurant au premier membre de la relation précédente n'admettent pas de facteur commun. Les deux polynomes figurant au second membre doivent alors leur être respectivement identiques, et l'on a par un calcul facile

$$A = -1, \qquad B = 2(m^2 + m_1^2),$$

et la relation (7) se réduit à

$$\cos\varphi = -1.$$

On voit immédiatement que, en supposant cette égalité satisfaite, le déplacement du triangle $a'p'q'$ par rapport au triangle apq rentrerait dans ceux que nous avons signalés au début de cette étude, et qui donnent des solutions sans intérêt du problème : ce déplacement se réduirait, en effet, à une translation telle que tous les points du triangle resteraient sur des sphères égales.

Revenant à la relation (8), on peut supposer que l'on a constamment $m = m_1$, $n = n_1$: on retombe ainsi sur la solution obtenue au § VI.

Ainsi l'étude du système II ne fournit rien de nouveau.

VIII.

Nous avons, au début du § V, supposé que les éléments de la *fig.* 2 sont de longueurs finies. S'il en est autrement, les raisonnements que nous avons faits ne peuvent plus s'appliquer sans modifications.

Supposons que, dans cette figure, les droites D et D′ s'éloignent à l'infini. Les plans apq et $a'pq$ deviennent parallèles et le déplacement du second par rapport au premier est une *translation* telle que le point a' décrive une droite perpendiculaire à ce plan apq.

Tous les quadrilatères, tels que $ama'm'$, ont maintenant leurs côtés de longueurs infinies, et le lemme relatif au quadrilatère gauche articulé, qui a joué un rôle fondamental dans les paragraphes précédents, cesse d'avoir un sens : on le remplace aisément par le suivant : *il doit exister une relation linéaire entre* $\overline{aa'}^2 = x^2$ *et le cosinus de l'angle* mam'.

En appliquant le lemme, ainsi modifié, au nouveau système, on trouve aisément les résultats suivants, semblables à ceux qui ont été obtenus dans le cas où les éléments de la figure étaient de grandeurs finies :

1° La détermination du système $(apq, a'pq)$ dépend d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, et cette équation est toujours irréductible;

2° Il ne peut y avoir correspondance uniforme entre les ystème précédent et le système $(app', a'pp')$. En d'autres termes, pour une valeur donnée de x, les déterminations de ces deux systèmes dépendent d'irrationnelles qui ne peuvent être identiques;

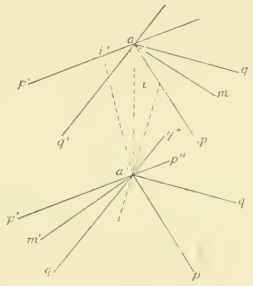
3° Quelles que soient les directions ap, aq, le dièdre formé par les plans apa', aqa' est toujours égal au dièdre formé par les plans $ap'a'$, $aq'a'$. On en déduit les égalités

$$\widehat{paq} = \widehat{p'aq'} = \widehat{pa'q} = \widehat{p'a'q}.$$

Comme précédemment, il y a deux cas de figure possibles : ou bien le système $aa'pq$ est superposable au système $aa'p'q'$, et s'en déduit par une rotation autour de aa'; ou bien le premier système est superposable à la figure symétrique de celle formée par le système $aa'p'q'$.

Il est aisé de voir que, en réalité, ces deux cas n'en font qu'un seul. Supposons, par exemple, que le premier se présente (*fig.* 9) : il suffit de remplacer les droites ap', aq', $a'p'$, $a'q'$ par leurs prolongements

Fig. 9.



ap'', aq'', $a'p''$, $a'q''$, et la figure $aa'p''q''$ est superposable à la figure symétrique de $aa'pq$.

Cela posé, la détermination du système dépend de deux variables, dont l'une est $aa' = x$, et l'autre, l'angle φ que font entre eux les plans $aa'p'$ et $aa'p$.

Il faut examiner si l'on peut former une relation entre ces deux variables, telle que, am et $a'm'$ étant deux droites homologues quelconques des plans apq et $a'p'q'$, il existe une relation linéaire entre x^2 et le cosinus de l'angle de ces deux droites.

Le point a', nous le rappelons, décrit, par rapport au plan apq, une droite qui lui est perpendiculaire. Soit i le pied de cette perpendiculaire; on peut supposer que ap contient le point i. Désignons par a la longueur constante ai.

On a dans le trièdre $aa'mm'$, dont le dièdre en aa' est égal à φ,

$$\cos \widehat{mam'} = \cos \widehat{a'am} \cos \widehat{a'am'} + \sin \widehat{a'am} \sin \widehat{a'am'} \cos \varphi$$

$$= \cos^2 \widehat{a'am} + \sin^2 \widehat{a'am} \cos \varphi.$$

Mais le trièdre $aa'pm$, dont le dièdre en ap est droit, donne la relation

$$\cos\widehat{a'am} = \cos\widehat{a'ai}\cos\widehat{iam} = \frac{a\cos\theta}{x^2},$$

en désignant par θ l'angle $\widehat{iam}$. On obtient ainsi

$$\cos\widehat{mam'} = \frac{a^2\cos^2\theta}{x^2} + \left(1 - \frac{a^2\cos^2\theta}{x^2}\right)\cos\varphi,$$

d'où, en égalant cette expression à une fonction linéaire de x^2,

$$(x^2 - a^2\cos^2\theta)\cos\varphi + a^2\cos^2\theta = Ax^4 + Bx^2.$$

La relation cherchée entre φ et x doit être telle qu'une semblable égalité ait lieu, quel que soit θ. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est, comme on le voit aisément, que cette relation ait la forme

$$\cos\varphi = kx^2 + 1.$$

Il est aisé de donner à cette relation une forme géométrique. A cet effet, abaissons sur ap' la perpendiculaire $a'i_1$: cette droite est perpendiculaire aux plans $ap'q'$ et $a'p'q'$, et par suite l'angle $\widehat{ia'i_1} = \gamma$ est égal à celui que font entre eux les plans apq et $a'p'q'$.

Le trièdre $aa'i_1$ donne alors

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos\widehat{aa'i}\cos\widehat{aa'i_1} + \sin\widehat{aa'i}\sin\widehat{aa'i_1}\cos\gamma \\ &= \cos^2\widehat{aa'i} + \sin^2\widehat{aa'i}\cos\gamma \\ &= 1 - \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{x^2}(kx^2 + 1) = 1 + ka^2 = \text{const.}\end{aligned}$$

Ainsi l'angle des deux plans apq, $a'p'q'$ est de grandeur constante.

En résumé, si l'on fixe le plan apq ou (P), le déplacement du plan $a'p'q'$ ou (P') est ainsi défini :

Un point a' appartenant au plan (P') décrit une droite perpendiculaire au plan (P), et dans le déplacement inverse, un point a,

appartenant au plan (P) *décrit une droite perpendiculaire au plan* (P′) (*on a* $ai = a'i'$, *en désignant par* i *et* i' *les pieds des deux perpendiculaires*). *Enfin l'angle que font entre eux les deux plans est de grandeur constante.*

Ce déplacement est bien déterminé, étant assujetti à cinq conditions. *Quand il y a lieu, tous les points du plan* (P′) *décrivent des lignes sphériques dont les centres appartiennent au plan* (P).

Cette réciproque est établie par les développements qui précèdent. Nous en donnerons cependant une démonstration analytique, qui mettra en évidence les propriétés du déplacement, avec moins d'efforts que n'en exige la voie géométrique que nous avons suivie.

IX.

Rapportons le plan (P) à trois axes fixes rectangulaires Ox, Oy, Oz choisis de telle manière que l'origine soit en a, que le plan des xy coïncide avec le plan (P), et que la droite décrite par le point a' ait pour équations

$$x = 2a, \qquad y = 0.$$

Rapportons de même le plan (P′) à trois axes mobiles $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, choisis d'une façon analogue. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point O dans le système fixe, et soit

	x'	y'	z'
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

le tableau des cosinus formés par les axes des deux trièdres pris deux à deux.

Ces cosinus peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de trois paramètres $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, au moyen des formules bien connues d'Olinde

Rodrigues; ces formules sont les suivantes :

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{p^2}, \qquad \alpha' = \frac{2(\lambda\mu - \nu\rho)}{p^2}, \qquad \alpha'' = \frac{2(\lambda\nu + \mu\rho)}{p^2},$$

$$\beta = \frac{2(\lambda\mu + \nu\rho)}{p^2}, \qquad \beta' = \frac{-\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{p^2}, \qquad \beta'' = \frac{2(\mu\nu - \lambda\rho)}{p^2},$$

$$\gamma = \frac{2(\lambda\nu - \mu\rho)}{p^2}, \qquad \gamma' = \frac{2(\mu\nu + \lambda\rho)}{p^2}, \qquad \gamma'' = \frac{-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}{p^2},$$

$$p^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2.$$

Cela posé, exprimons successivement les conditions dans lesquelles se déplace le plan P'. On a d'abord

$$(8) \qquad \xi = 2a, \qquad \eta = 0.$$

Écrivons ensuite que le point O décrit, par rapport au système mobile, la droite

$$x' = 2a, \qquad y' = 0.$$

Il vient

$$-\alpha\xi - \beta\eta - \gamma\zeta = 2a,$$
$$-\alpha'\xi - \beta'\eta - \gamma'\zeta = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (8),

$$2a(\alpha + 1) + \gamma\zeta = 0,$$
$$2a\alpha' + \gamma'\zeta = 0;$$

l'élimination de ζ entre les deux relations précédentes donne

$$2a(\alpha\gamma' - \gamma\alpha' + \gamma') = 0,$$

ou

$$\gamma' - \beta'' = 0,$$

et, en remplaçant γ' et β'' par leurs valeurs,

$$\lambda\rho = 0.$$

Nous supposerons

$$\rho = 0,$$

en laissant au lecteur le soin de vérifier que l'hypothèse

$$\lambda = 0$$

ne mènerait pas à des résultats différents de ceux que nous allons obtenir.

Il reste à égaler le cosinus γ'' à une constante. Il vient ainsi

$$\frac{-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2} = k.$$

Il y a avantage à introduire la quantité h, définie par la relation

$$k = \frac{2a^2 - h^2}{h^2}.$$

En outre, comme λ, μ, ν interviennent d'une façon homogène, nous pouvons faire $\nu = 1$, ce qui simplifie l'écriture. Le tableau des cosinus devient alors, après des réductions faciles,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{h^2}(2a^2\lambda^2 - h^2), & \beta = \alpha' &= \frac{2a^2\lambda\mu}{h^2},\\ \beta' &= \frac{1}{h^2}(-2a^2\lambda^2 + h^2 - 2a^2), & \gamma = \alpha'' &= \frac{2a^2\lambda}{h^2},\\ \gamma' &= \beta'' = \frac{2a^2\mu}{h^2}, & \gamma'' &= \frac{2a^2 - h^2}{h^2}, \end{aligned}\right.$$

les paramètres λ et μ étant reliés par la relation

$$(10)\qquad \lambda^2 + \mu^2 = \frac{h^2 - a^2}{a^2}.$$

Ces relations, jointes aux relations (8) et à la suivante

$$(11)\qquad \zeta = \frac{2a\alpha'}{\gamma'} = -2a\lambda,$$

déterminent un déplacement du trièdre $O'x'y'z'$ et, par suite, du plan $O'x'y'$, qui s'effectue dans les conditions prescrites.

Soient $x'y'z'$ les coordonnées d'un point m' lié au trièdre $O'x'y'z'$, par rapport à ce trièdre. Cherchons s'il existe un point fixe m, de coordonnées x, y, z, par rapport au trièdre $Oxyz$, tel que la distance mm' soit constante pendant le déplacement.

Les coordonnées du point m', dans le système fixe, sont

$$X = \xi + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$Y = \eta + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$Z = \zeta + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

et la condition

$$mm' = \text{const.}$$

s'exprime par l'égalité

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = A,$$

dont le second membre doit être fonction seulement de x, y, z, x', y', z'.

En tenant compte des relations (8), (9), (10) et (11), on met facilement l'égalité précédente sous la forme

$$4a^2\left(1 - \frac{xx' - yy'}{h^2}\right)\lambda^2 + \frac{4a^2}{h^2}(xy' + yx')\lambda\mu + 4a\left[z + z' + \frac{a(xz' + zx')}{h^2}\right]\lambda$$
$$+ \frac{4a^2}{h^2}(yz' + zy')\mu = B,$$

où B désigne encore une quantité constante pendant le déplacement. Ceci doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de λ et μ satisfaisant à la relation (10). Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont que les coefficients de λ^2, $\lambda\mu$, λ et μ soient nuls. En d'autres termes, si l'on se donne x', y', z', les coordonnées x, y, z doivent pouvoir être déterminées de manière à satisfaire aux relations

$$xx' - yy' = h^2,$$
$$xy' + yx' = 0,$$
$$h^2(z + z') + a(xz' + zx') = 0,$$
$$yz' + zy' = 0.$$

Ces équations sont au nombre de *quatre*. Ainsi, x', y', z ne peuvent être choisis arbitrairement.

L'étude du système précédent est extrêmement simple, et il suffit d'en indiquer le résultat : parmi les divers points entraînés avec le trièdre $O'x'y'z'$, il n'y a que ceux appartenant aux plans $O'x'y'$ et $O'x'z'$ qui décrivent des lignes sphériques :

1° Le point $(x', y', 0)$ du plan $O'x'y'$ décrit une ligne sphérique dont le centre a pour coordonnées dans le système fixe

$$x = \frac{h^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{-h^2 y'}{x'^2 + y'^2}, \qquad z = 0;$$

c'est la vérification du résultat énoncé à la fin du paragraphe précédent. En outre, les formules précédentes expriment que la correspondance des points m et m' est identique à celle que définirait une *inversion* de module h^2.

2° Le point $(x', 0, z')$ du plan $O'x'z'$ décrit une ligne sphérique dont le centre a pour coordonnées dans le plan fixe

$$x' = \frac{h^2}{x}, \qquad y' = 0, \qquad z' = \frac{-h^2 z(x+a)}{x(ax+h^2)}.$$

Ces formules définissent une transformation quadratique qui, à toute droite de l'un des plans, fait correspondre une hyperbole équilatère de l'autre plan. Au point

$$z' = 0, \qquad x' = -\frac{h^2}{a},$$

correspondent tous les points de la droite

$$x = -a.$$

Il existe donc, dans le plan $O'x'z'$, un point qui décrit une *circonférence de rayon fini*. Le déplacement du plan $O'x'z'$ est nécessairement identique, par conséquent, à celui que nous avons étudié au § VI.

Le fait se vérifie de la manière suivante :

Si l'on a égard à l'interprétation cinématique des formules d'Olinde

Rodrigues [1], on reconnaît que le trièdre $O'x'y'z'$ est symétrique du trièdre $Oxyz$ par rapport à la droite ayant pour équations

$$\frac{x-a}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = z + a\lambda.$$

Et, comme on le voit en tenant compte de la relation (10), cette droite se déplace aux conditions suivantes : elle s'appuie constamment sur la droite parallèle à Oz

$$x = a, \qquad y = 0;$$

elle rencontre aussi constamment le cercle

$$z = 0, \qquad a(x^2 + y^2) - (a^2 + h^2)x + ah^2 = 0,$$

qui a son centre sur Ox et passe par le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Enfin elle fait avec Oz un angle constant.

Or, ces conditions sont identiques à celles que nous avons obtenues au § VI, pour le déplacement de l'axe de symétrie des plans (P) et (P').

X.

Nous avons à présent résolu complètement le problème que nous avons en vue, et il ne nous semble pas mauvais d'en résumer ici les résultats.

Il existe *deux cas* dans lesquels un plan se déplace de manière que tous ses points décrivent des lignes appartenant à des sphères ayant leurs centres dans un plan fixe, et, circonstance assez remarquable, ces deux cas sont réalisés *en même temps* dans le déplacement d'un système qu'on peut définir ainsi qu'il suit :

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle fixe. Imaginons une droite L *qui se déplace dans les conditions suivantes : elle s'appuie sur Oz*

[1] Koenigs, *loc. cit.*

et sur une circonférence située dans le plan Oxy *et tangente au point* O *à* Oy, *de plus, elle fait un angle constant avec* Oz.

Pour chaque position de L, *construisons le trièdre* $O'x'y'z'$ *symétrique du trièdre fixe par rapport à cette droite. Tous les points du plan* $O'x'y'$ *restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan* Oxy *et tous les points du plan* $O'x'z'$ *restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan* Oxz.

La correspondance qui existe entre les points du plan mobile et les points du plan fixe qui sont les centres des lignes sphériques décrites est très différente, suivant que l'on considère le système $(O'x'y', Oxy)$ ou le système $(O'x'z', Oxz)$. Dans le premier cas, cette correspondance est une *inversion* (en supposant qu'on amène le plan $O'x'y'$ à coïncider avec le plan Oxy, et dans une position convenable [1]). Dans le second cas, cette correspondance résulte d'une *transformation quadratique* qui change une droite quelconque en hyperbole équilatère.

En faisant varier les constantes qui interviennent dans les formules de ces deux correspondances, on ne pourra jamais faire qu'elles soient identiques. Il faut en conclure que les déplacements de $O'x'y'$ et de $O'x'z'$ appartiennent à des types différents.

Je terminerai en signalant les propriétés les plus simples qui se déduisent aisément des équations (8), (9), (10) et (11), et qu'il suffit d'énoncer ici : Chacun des plans $O'x'y'$ et $O'x'z'$ passe par un point fixe; de plus, le premier enveloppe un cône de révolution.

Les lignes sphériques décrites par les points du plan $O'x'y'$ sont des biquadratiques gauches projetées suivant des cercles sur le plan Oxy; les trajectoires des points du plan $O'x'z'$ sont des courbes de même nature, qui se projettent sur le plan Oxz suivant des paraboles.

Enfin, comme nous l'avons reconnu dès le commencement de ce

---

(1) Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXXV, p. 1026), j'avais signalé le déplacement de $O'x'y'$ par rapport à Oxy comme étant le seul qui permette aux points d'un plan d'avoir pour trajectoires des lignes sphériques. Une étude plus complète m'a fait reconnaître l'existence du second cas.

Mémoire, la question qui en fait l'objet est intimement liée à la Théorie de l'octaèdre articulé.

Dans le plan $O'x'y'$, il existe trois points à chacun desquels l'inversion fait correspondre tous les points d'une ligne droite située dans le plan Oxy : ce sont le point O et les points cycliques du plan $O'x'y'$, I' et J'. De même le point O et les points cycliques I et J du plan Oxy correspondent chacun à tous les points d'une droite.

On peut donc considérer le déplacement d'un plan $O'x'y'$ comme s'effectuant de manière que les points O', I' et J' décrivent des circonférences ayant pour axes respectifs IJ, OJ et OI, et la figure OIJO'I'J' constitue un octaèdre articulé imaginaire.

Le déplacement du plan $O'x'z'$, par rapport au plan Oxz, donne lieu aussi à la considération d'un octaèdre articulé; mais celui-ci présente un cas de dégénérescence, parce que les triangles fondamentaux de la transformation quadratique qui fait correspondre entre eux les points des deux plans ont chacun deux sommets confondus.

XI.

Au courant de cette étude, nous avons rencontré, à deux reprises, le déplacement d'une droite L assujettie aux conditions suivantes : $Oxyz$ étant un trièdre trirectangle fixe, cette droite rencontre, sous un angle constant, l'axe Oz et s'appuie sur un cercle tracé dans le plan des xy et tangent à Oy au point O. Ce déplacement jouit de propriétés remarquables qui résultent immédiatement de celles que nous avons reconnues au déplacement du trièdre $O'x'y'z'$, mais dont nous allons donner des démonstrations directes et élégantes, qu'a bien voulu nous communiquer M. Mannheim.

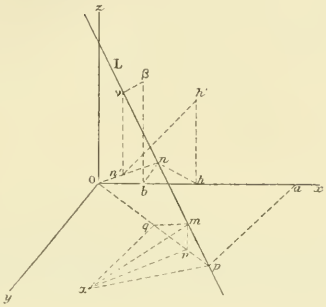
Tout d'abord, *le lieu des projections sur la droite* L *d'un point quelconque du plan* Oxy *ou du plan* Oxz *est toujours une courbe sphérique.*

Établissons d'abord cette propriété dans le cas où le point fixe, dont on prend la projection sur la droite L, appartient au plan Oxy. Soit α ce point (*fig.* 10).

Désignons par p la trace de L sur le plan Oxy; soient q la projec-

tion du point α sur Op, m la projection du point q sur L : le point m est aussi la projection du point α sur L. Soit enfin r la projection du point m sur Op.

Fig. 10.



Le triangle rectangle qmp a ses angles de grandeurs constantes, d'après l'hypothèse : il en résulte que le point r divise le segment pq dans un rapport constant; d'autre part, les points q et p décrivent des circonférences dont les diamètres sont respectivement $O\alpha$ et Oa, a étant un point fixe de Ox. Donc, en vertu d'un théorème connu, le point r décrit un cercle; ainsi la courbe (m) se trouve déjà sur un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à Oz.

Soit maintenant i le point de rencontre, autre que O, des circonférences (p) et (q) (ce point i, projection du point O sur la droite $a\alpha$, n'est pas marqué sur la figure). Le triangle piq a ses angles de grandeur constante; par conséquent la figure $ipmq$ est toujours semblable à elle-même, et l'angle $\widehat{rim}$ est de grandeur constante. En d'autres termes, la courbe (m) appartient à un cône de révolution de sommet i et dont l'axe est parallèle à Oz.

Cette courbe, intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles, appartient donc à une sphère dont le centre est dans le plan Oxy, par raison évidente de symétrie.

Soient maintenant β un point du plan Oxz, et ν sa projection sur L. Nous devons montrer que le point ν décrit encore une courbe sphérique.

A cet effet, projetons le point β sur Ox au point h, et le point h sur L

au point n. Comme le point b appartient au plan Oxy, le point n reste sur une sphère. On voit facilement que le centre de cette sphère est un point h de la droite Ox, et, de plus, que la droite On fait un angle constant avec les droites Oz et L : il suffit pour cela d'appliquer les résultats précédemment obtenus au cas où le point α vient en b.

Le segment νn fait un angle constant avec la droite $b\beta$, et sa projection sur cette droite est le segment $b\beta$, de longueur constante. On a, par suite, en $\nu nn'$ un triangle de grandeur invariable, comme ayant un côté de longueur constante compris entre deux angles également de grandeurs constantes.

Le segment $\nu n'$ est donc de longueur constante, et la courbe (ν) s'obtient en donnant à la courbe (n') une translation parallèle à Oz. Il suffit donc de démontrer que la courbe (n') est tracée sur une sphère.

Or, la démonstration de ce fait est immédiate : le plan mené par le point n', perpendiculairement à On coupe la parallèle à Oz menée par le point h en un point h' qui est fixe, puisque nn', segment de longueur constante, est la projection du segment hh' sous un angle de grandeur constante.

La courbe (n') appartient donc à une sphère de diamètre Oh'. On en déduit immédiatement la construction de la sphère sur laquelle se trouve la courbe (ν).

Remarque. — On déduit immédiatement de l'étude du déplacement de la droite L un mode de déplacement d'un plan tel que tous les points de ce plan décrivent des lignes sphériques; ce déplacement rentre dans ceux que nous avons signalés au § I, comme cas de *demi-dégénérescence*. Il suffit de remarquer que si l'on déplace cette droite en l'assujettissant aux conditions prescrites, et en astreignant le point n à rester sur une sphère de centre h (plus généralement, ayant son centre en un point quelconque du plan Oxz), tout point ν de la droite L, lié au point n, décrit aussi une courbe sphérique : cela résulte, en effet, directement des raisonnements qui précèdent.

Or, la droite L fait un angle constant avec Oz; on voit donc (§ I) qu'en liant à cette droite un plan passant constamment par Oz, tous les points de ce plan décrivent des lignes sphériques.

Prix de l'Académie des Sciences de Göttingue.

Question proposée pour l'année 1901 :

Donner pour un domaine de rationalité quelconque la loi de réciprocité pour les résidus des puissances $l^{\text{ièmes}}$, où l est un nombre premier impair.

Commentaire (¹). — Soit l un nombre premier impair, ζ une racine $l^{\text{ème}}$ de l'unité, différente de 1, k un domaine de rationalité contenant le nombre ζ : cela posé, si l'on désigne par ν, μ deux nombres entiers du domaine k, par $\mathfrak{w}$ un idéal premier de k, la loi de réciprocité pour les résidus des puissances $l^{\text{èmes}}$ la plus générale dans le domaine k peut être mise sous la forme

$$\Pi_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

le produit Π s'étendant sur tous les idéaux premiers $\mathfrak{w}$ du domaine k et le symbole $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ signifiant une racine $l^{\text{ème}}$ de l'unité, déterminée d'une manière unique par les nombres ν, μ et l'idéal premier $\mathfrak{w}$. On demande d'énoncer complètement les théorèmes spéciaux contenus dans cette loi de réciprocité générale et de donner la démonstration de la loi au moins dans quelques cas spéciaux ou sous des hypothèses

(¹) Pour les notations, voir HILBERT, *Berichte der deutschen Mathematiker Vereinigung : Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* : 1897. Cap. XXIX.

simplifiantes proprement choisies. Une grande valeur sera attachée au calcul de quelques exemples numériques propres à éclaircir et confirmer ladite loi.

Le prix est de mille marks.

Les Mémoires destinés au concours seront reçus jusqu'au 1er février 1901 par MM. les Secrétaires de l'Académie; ils porteront une devise et seront accompagnés d'un pli cacheté, portant la devise à son extérieur et renfermant le nom et l'adresse de l'auteur.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME IV.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

		Pages
[S4a]	L'intégrale des forces vives en Thermodynamique; par M. *P. Duhem*	5
[J4]	Sur les groupes d'ordre $p^m q^2$; par M. *Camille Jordan*	21
[O51]	Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques; par M. *Hadamard*	27
[J4]	Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions; par M. *H. Laurent*	75
[O8]	Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques; par M. *Ernest Duporcq*	121
[G6a]	Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$; par M. *H. Poincaré*	137
[F8h]	De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène; par M. *Mathy*	231
	Fondation Beneke	239
[T5]	Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet; par M. *A. Liapounoff*	241

Pages

[H9d3] Sur l'équation $\Delta u = e^u$; par M. *Émile Picard*. 313

[D4] Sur les points singuliers d'une série de Taylor; par M. *Eugène Fabry* 317

[H9] Sur les équations linéaires aux dérivées partielles; par M. *J. Le Roux* 359

[O8] Mémoire sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques; par M. *Raoul Bricard* 409

Prix de l'Académie des Sciences de Gottingue 449

FIN DU TOME IV DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

2640 — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.5
t.4
Physical &
Applied Sci.
Serials

Mat

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Journal de mathématiques
pures et appliquées